Analyse et Calcul Matriciel

Cours 9 Transformation de Fourier (1)

- Quelques exemples

Exponentielle causale. Pour $a > 0$, on pose $\varphi_a(t) = \exp(-at)$ si $t \geq 0$ et $\varphi_a(t) = 0$ si $t < 0$. Alors $\widehat{\varphi_a}(\omega) = \dfrac{1}{a + i\,\omega}$.

Exponentielle symétrisée. Pour $a > 0$, on pose $\psi_a(t) = \exp(-a|t|)$. Alors $\widehat{\psi_a}(\omega) = \dfrac{2\,a}{a^2 + \omega^2}$.

Porte. Pour $T > 0$, on pose $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon. Alors $\widehat{P_T}(\omega) = \dfrac{2}{\omega} \sin\Big(\dfrac{\omega\,T}{2}\Big)$.

- Fonction absolument intégrable sur la droite réelle

On dit qu'une fonction f définie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (ou plus simplement intégrable sur $\mathbb{R}$) si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente. On écrit alors $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Si f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente : c'est un nombre réel ou complexe parfaitement défini.

- Définition de la transformée de Fourier

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\widehat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$. L'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ transforme la fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en la fonction $\mathscr{F} f = \widehat{f}$.

Les trois familles de fonctions proposées plus haut, l'exponentielle causale φ_a, l'exponentielle symétrisée ψ_a et la porte P_T sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Leur transformée de Fourier se calcule sans difficulté.

- La transformée de Fourier $\widehat{f}$ est toujours bornée et tend vers zéro à l'infini

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ est bornée : $\forall\,\omega \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\omega) \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. De plus, la fonction $\mathscr{F} f = \widehat{f}$ qui tend vers zéro à l'infini : $\displaystyle\lim_{\omega \longrightarrow \infty} \widehat{f}(\omega) = 0$ et $\displaystyle\lim_{\omega \longrightarrow -\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$.

- Linéarité . Si f et g sont des fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et λ un nombre complexe arbitraire, on a $\mathscr{F}(f + g) = (\mathscr{F} f) + (\mathscr{F} g)$ et $\mathscr{F}(\lambda\, f) = \lambda\, \mathscr{F} f$.

- Retard.

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, on a $\big(\mathscr{F}(f(t-a))\big)(\omega) = \exp(-i\,\omega\,a)\,(\mathscr{F} f)(\omega)$, $\forall\,\omega \in \mathbb{R}$.

- Parité. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est paire, alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est paire également. Si f est réelle et paire, alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est réelle et paire.

- Dérivée de la transformée de Fourier

Si les fonction f et $t\,f(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (c'est à dire si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |t|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ sont toutes deux convergentes), alors la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{R}$ est une fonction dérivable de la variable ω et on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\widehat{f}(\omega) = -i\,\big(\mathscr{F}(t\,f(t))\big)(\omega)$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 23 novembre 2016.