le cnam **Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 10 Transformation de Fourier (2)

- Un exemple

Exponentielle symétrisée. Pour $a > 0$, on pose $\psi_a(t) = \exp(-a|t|)$. Alors $\widehat{\psi_a}(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

- Transformée de Fourier de la dérivée

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est de plus dérivable et si la fonction dérivée f' appartient aussi à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (c'est à dire $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente), alors $\big(\mathscr{F}(f')\big)(\omega) = i\,\omega\,(\mathscr{F}f)(\omega),\ \forall\,\omega \in \mathbb{R}$.

- Continuité de la transformée de Fourier

Si la fonction f appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est une fonction continue de la variable ω: $\lim\limits_{\theta \longrightarrow 0} \widehat{f}(\omega+\theta) = \widehat{f}(\omega)$ pour tout réel ω.

- Opérateur de Fourier conjugué

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\overline{\mathscr{F}}f$ par la relation $\big(\overline{\mathscr{F}}f\big)(\omega) = \big(\mathscr{F}f\big)(-\omega)$: $\big(\overline{\mathscr{F}}f\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$. L'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$ associe à toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ la fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \big(\overline{\mathscr{F}}f\big)(\omega) \in \mathbb{C}$. Il a essentiellement les mêmes propriétés que l'opérateur $\mathscr{F}$: la fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \overline{\mathscr{F}}f(\omega) \in \mathbb{C}$ est bornée, continue, tend vers zéro si l'argument ω tend vers $+\infty$ ou $-\infty$; l'opérateur $\overline{\mathscr{F}}$ est linéaire. Sous les mêmes hypothèses que pour $\mathscr{F}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\overline{\mathscr{F}}f(\omega) = i\big(\overline{\mathscr{F}}(t\,f(t))\big)(\omega)$ et $\big(\overline{\mathscr{F}}(f')\big)(\omega) = -i\,\omega\,(\overline{\mathscr{F}}f)(\omega),\ \forall\,\omega \in \mathbb{R}$.

- Théorème d'inversion de Fourier

On suppose que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ l'est également : $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\theta)|\,\mathrm{d}\theta$ sont des intégrales convergentes. Alors on a $f = \dfrac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\,\big(\mathscr{F}f\big)$ et on a "presque partout" pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$.
Seul le second exemple (exponentielle symétrisée) satisfait aux hypothèses du théorème d'inversion de Fourier et pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $\exp(-a|t|) = \dfrac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{a^2+\omega^2}\,\exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$.

- Produit de convolution

Si les fonctions f et g appartiennent à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, le produit de convolution $f*g$ est défini par l'intégrale $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,g(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$. ALors la fonction $f*g$ appartient encore à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

- Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Lors d'une transformation de Fourier, un produit de convolution est changé en un produit ordinaire : $\mathscr{F}(f*g) = (\mathscr{F}f)\,(\mathscr{F}g)$. C'est aussi le cas avec l'opérateur de Fourier conjugué : $\overline{\mathscr{F}}(f*g) = (\overline{\mathscr{F}}f)\,(\overline{\mathscr{F}}g)$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 30 novembre 2016.