le cnam Analyse et Calcul Matriciel

Cours 11 Espaces vectoriels, applications linéaires et matrices

- Deux exemples de produits matriciels

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ (matrice d'une seule ligne et deux colonnes) et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (matrice de deux lignes et une colonne). Alors $A \bullet B = (a-b)$ est une matrice à une seule ligne et une seule colonne. De plus, $B \bullet A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$ est cette fois une matrice à deux lignes et deux colonnes.

On a aussi : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. L'ordre dans lequel on effectue le produit de deux matrices est toujours important ; le produit des matrices n'est pas commutatif.

- Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Un espace vectoriel $(E, +, \bullet)$ est la donnée d'un ensemble (de vecteurs) E, d'une addition $E \times E \longrightarrow E$ qui à x, y appartenant à E associe $x+y$, qui est encore un vecteur de E, et d'une multiplication d'un scalaire par un vecteur $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ associe le vecteur $\lambda \bullet x$ de l'espace E.

- Exemples d'espace vectoriels

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des vecteurs colonnes de la forme $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 et x_2 sont des nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si on a x donné comme plus haut et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ et pour tout nombre réel λ, $\lambda \bullet x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \end{pmatrix}$.

L'ensemble E_N des polynomes trigonométriques de période 2π et de degré inférieur ou égal à N de la forme $f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N} \big(\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt) \big)$ est un espace vectoriel pour la somme des fonctions (la fonction $f+g$ est définie par $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ pour tout t) et leur multiplication par un scalaire (la fonction $\lambda \bullet f$ est définie par $(\lambda \bullet f)(t) = \lambda\, f(t)$ pour tout t).

- Axiomes d'un espace vectoriel

Le triplet $(E, +, \bullet)$ est un espace vectoriel si et seulement si

(i) $(E, +)$ est un groupe commutatif : on a l'associativité de l'addition : $(x+y)+z = x+(y+z)$, l'exitence de l'élément neutre 0: $x+0 = 0+x = x$, l'existence d'un opposé $-x$ pour tout vecteur x : $x + (-x) = (-x) + x = 0$ et la commutativité de l'addition : $x+y = y+x$. L'addition des vecteurs a les mêmes propriétés que la somme et la différence des nombres ordinaires.

(ii) La multiplication $\bullet$ par un scalaire est compatible avec l'addition : $0 \bullet x = 0$, $\lambda \bullet 0 = 0$, $1 \bullet x = x$, $(\lambda + \mu) \bullet x = \lambda \bullet x + \mu \bullet x$, $\lambda \bullet (x+y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$, $\lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda\, \mu) \bullet x$.

Un espace vectoriel permet de faire de nombreux calculs. Il étend en particulier aux espaces de fonctions les propriétés des vecteurs de l'espace ordinaire.

François Dubois et Chloé Mimeau, 07 décembre 2016.

- Combinaison linéaire

On se donne un entier n et une famille $x_1, \ldots, x_n$ de vecteurs de l'espace vectoriel E. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur x qui s'écrit sous la forme
$x = \lambda_1 \bullet x_1 + \ldots + \lambda_n \bullet x_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j \bullet x_j$, où les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires.

- Sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble F de l'espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'addition de E et la multiplication par un scalaire $\bullet$ munissent F d'une structure d'espace vectoriel.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble F de l'espace vectoriel E soit un sous espace vectoriel est que toute combinaison linéaire (calculée dans l'espace E) de vecteurs de F appartienne encore à F: pour tous les vecteurs x et y de F, la somme $x + y$ appartient à F et pour tout scalaire λ et tout vecteur x de F, le produit $\lambda \bullet x$ appartient encore à F.
L'ensemble F des vecteurs colonnes x de la forme $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Si m est un entier inférieur ou égal à N, l'espace E_m des polynomes trigonométriques de degré inférieur ou égal à m est un sous-espace vectoriel de E_N.

- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

On se donne une famille finie $x_1, \ldots, x_n$ de vecteurs de l'espace vectoriel E. L'ensemble $< x_1, \ldots, x_n >$ de toutes les combinaisons linéaires de la forme $\sum_{j=1}^n \lambda_j \bullet x_j$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est par définition le sous-espace vectoriel $< x_1, \ldots, x_n >$ engendré par la famille des n vecteurs.

- Famille libre et famille liée

La famille de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est libre si et seulement si lorsqu'une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n \alpha_j \bullet x_j$ est nulle, alors tous les coefficients α_j sont nuls : $\big(\sum_{j=1}^n \alpha_j \ldots x_j = 0\big) \Longrightarrow \big(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\big)$.
La famille de vecteurs (e_1, e_2), où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
La famille de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est liée si et seulement si elle n'est pas libre : il existe des coefficients $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ non tous nuls tels que la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n \alpha_j \bullet x_j$ est nulle.
Avec les notations précédentes, si on pose $e_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'égalité $e_{12} = e_1 + e_2$ montre que la famille (e_1, e_2, e_{12}) est liée.

- Famille génératrice

La famille de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est génératrice si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs : $\forall x \in E, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bullet x_j$. Alors l'espace vectoriel E est de dimension finie et $\dim E \le n$.
La famille précédente (e_1, e_2, e_{12}) de $\mathbb{R}^2$ est génératrice. Il en est de même de la famille (e_1, e_2).

- Base

Une base $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est une famille à la fois libre et génératrice. Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire de vecteurs de la base : $\forall x \in E, \exists!\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bullet b_j$. Les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ existent et sont uniques. Si une base comporte n vecteurs, alors $\dim E = n$.
Avec les notations introduites plus haut, la famille (e_1, e_2) est une base de l'espace $\mathbb{R}^2$.

- Application linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F. Une application linéaire u de E dans F est une application de E dans F (pour tout x dans E, il existe un unique vecteur image $u(x)$ dans F) telle que pour tout x, y dans E et tout scalaire λ, on a $u(x+y) = u(x) + u(y)$, $u(\lambda \bullet x) = \lambda \bullet u(x)$. L'identité id de $\mathbb{R}^2$ est l'aplication linéaire définie par $\mathrm{id}(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Si on décompose tout vecteur x de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sous la forme $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ dans la base (e_1, e_2), la projection p est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $p(x) = \alpha_1 e_1$. La symétrie s est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $s(x) = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2$.

- Noyau et image d'une application linéaire

On se donne une application linéaire u de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F. Le noyau $\ker u$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $u(x) = 0$: $\ker u = \{x \in E,\ u(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. L'image $\mathrm{Im}\, u$ est l'ensemble de tous les vecteurs y de F qui peuvent s'écrire sous la forme $y = u(x)$: $\mathrm{Im}\, u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E, y = u(x)\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F.
Avec les notations précédents, $\ker \mathrm{id} = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, \mathrm{id} = \mathbb{R}^2$. De façon analogue, $\ker p = < e_1 >$ (espace engendré par le vecteur e_1) et $\mathrm{Im}\, p = < e_2 >$ (espace engendré par le vecteur e_2). Enfin, $\ker s = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, s = \mathbb{R}^2$.

- Matrice d'une application linéaire relativement à une base

On se donne un espace E de dimension n, un espace F de dimension m et une application linéaire u de E dans F. On se donne aussi une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et une base $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ de l'espace F. Pour $j = 1, \ldots, n$, le vecteur $u(e_j)$ image d'un vecteur de la base de E se décompose de façon unique dans la base $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$: il existe des coefficients uniques $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ de sorte que $u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bullet f_i$. On regroupe ces nm coefficients dans un tableau $A = \big(a_{ij}\big)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ à m lignes et n colonnes appelé matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ de F. On écrit la matrice ainsi : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Si les espaces E et F sont égaux, on dit que l'application linéaire u est un endomorphisme de l'espace E dans lui-même. On choisit alors usuellement la base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ égale à $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

La matrice de l'identité id de l'espace $\mathbb{R}^2$ dans la base (e_1, e_2) s'écrit $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice identité d'ordre 2. Dans les mêmes conditions, la matrice de la projection p est égale à $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Enfin, la symétrie s a pour matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2).

- Expression matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Avec les mêmes notations, on regroupe les composantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ du vecteur $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bullet e_j$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E sous la forme d'un vecteur X composé d'une colonne et n lignes : $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

De même, les coordonnées $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ du vecteur $y = u(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i \bullet f_i$ dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ de F sont représentées avec un vecteur Y à une colonne et m lignes :
$Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Alors les coordonées $\beta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ s'expriment à l'aide du produit de la matrice A par le vecteur X: $Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \bullet X.$

Pour $m = 3$, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a par exemple $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\,\alpha \\ 3\,\alpha + \beta \end{pmatrix}$.

- Composition des applications linéaires et produit de matrices

On se donne maintenant trois espaces vectoriels D, E et F de dimensions respectives q, n et m et deux applications linéaires $v : D \longrightarrow E$ de D dans E et $u : E \longrightarrow F$ de E dans F. On a alors le diagramme suivant $D \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F$ qui permet de définir l'application composée $u_\circ v$: $(u_\circ v)(w) = u\big(v(w)\big)$ pour tout vecteur $w \in D$. L'application composée $u_\circ v$ est elle aussi linéaire.

On se donne une base $(d_1, d_2, \dots, d_q)$ de l'espace D en plus des bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ des espaces E et F. On suppose que $v(d_k) = \sum_{j=1}^n b_{jk} e_j$. Alors dans les bases (d_k) et (e_j), l'application v est représentée par une matrice B à n lignes et q colonnes qui s'écrit $B = \big(b_{jk}\big)_{1 \leq j \leq n,\, 1 \leq k \leq q}$. On a alors $(u_\circ v)(d_k) = \sum_{i=1}^m \big(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\big) f_i$ ce qui signifie que relativement aux bases (d_k) et (f_i), l'application composée $u_\circ v$ est représentée par une matrice C à m lignes et q colonnes avec $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\, b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq k \leq q$.

La matrice C est par définition égale au produit des matrices A et B: $C = A \bullet B$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & a_{mq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix}.$$

Dans le produit $C = A \bullet B$, on remarque que le nombre n de colonnes de la matrice de gauche (ici A) est toujours égal au nombre de lignes n de la matrice de droite (ici B). Sinon, le produit $A \bullet B$ n'est pas défini. On suggère au lecteur de relire ici les deux exemples proposés au début de ces notes.

- Matrices carrées

Une matrice carrée a le même nombre de lignes et de colonnes, appelé aussi ordre de la matrice. Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, le produit $A \bullet B$ est toujours défini. On a l'associativité de la multiplication matricielle : $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$.
La matrice identité I a tous ses éléments nuls, sauf ses élémets diagonaux (j=i) pour lesquels $\mathrm{I}_{ij} = 1$. Si on introduit le symbole de Kronecker δ_{ij} tel que $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, on a $\mathrm{I}_{ij} = \delta_{ij}$. Tout comme le nombre 1 pour la multiplication des nombres usuels, la matrice identité est un élément neutre pour la multiplication des matrices : $A \bullet \mathrm{I} = \mathrm{I} \bullet A = A$ pour toute matrice carrée A.

- Inverse d'une matrice carrée

On se donne une matrice carrée A d'ordre n. Si on peut trouver une matrice B telle que $A \bullet B = B \bullet A = \mathrm{I}$, la matrice A est inversible. On pose $B = A^{-1}$.
Si la matrice carrée A est inversible, la matrice inverse A^{-1} est unique.
On a par exemple $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Attention. Le produit de deux matrices carrées peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul ! On peut avoir $A \bullet B = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
Ainsi, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.