le cnam **Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 13 Déterminants

- Le cas de la dimension deux

On se donne une matrice d'ordre 2 notée $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible, ce qui signifie que le système linéaire $AX = B$ a une solution unique $X \in \mathbb{R}^2$ quel que soit le second membre $B \in \mathbb{R}^2$, si et seulement si le déterminant de A défini par $\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \equiv ad - bc$ est différent de zéro.

- Règles de calcul d'un déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n est un nombre noté $\det A$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) Si $n = 1$, $\det A = A$.

(ii) Réduction de l'ordre. Si α est un nombre, B une matrice carrée d'ordre $(n-1)$ et

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & B & \\ \star & & & \end{array}\right) \quad \text{ou} \quad A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{alors } \det A = \alpha \det B.$$

(iii) Invariance par transposition : $\det A^{\mathrm{t}} = \det A$.

(iv) Si on échange deux lignes [respectivement deux colonnes] de la matrice, on change le signe du déterminant.

(v) Si on multiplie tous les éléments d'une ligne [respectivement d'une colonne] par un même scalaire λ, on multiplie le déterminant par λ.

(vi) On peut retrancher à une ligne [respectivement une colonne] donnée toute combinaison linéaire des autres lignes [respectivement des autres colonnes] sans changer la valeur du déterminant.

Avec les règles ci-dessus, on établit sans difficulté que $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

- Théorème fondemental

Soit A une matrice carrée d'ordre n. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

- Règle de Sarrus pour le calcul d'un déterminant d'ordre trois

A l'aide des règles de calcul d'un déterminant proposées ci-dessus, on établit, après un calcul qui ne demande que du soin, une relation générale pour le calcul d'un déterminant d'ordre 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - dbi - ahf - gec.$$

François Dubois et Chloé Mimeau, 04 janvier 2017.

Exemple : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a\,b\,c\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,.$

- Un déterminant d'ordre quatre : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = \left(a^4-1\right)^3.$

- Déterminant d'un produit de matrices

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, le déterminant du produit est égal au produit des déterminants : $\det\,(A\,B) = (\det A)\,(\det B)$.

En particulier, si la matrice P est inversible, on a $\det\,(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det P}$.

Le déterminant d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E dans lui-même ne dépend pas de la base choisie. En effet, supposons que u admet pour matrice A par rapport à une base donnée. Dans un changement de base associé à une matrice de passage P, la nouvelle matrice $\widetilde{A}$ de u par rapport à la nouvelle base satisfait à la relation $\widetilde{A} = P^{-1}\,A\,P$. Donc $\det \widetilde{A} = \det A$ compte tenu de ce qui vient d'être établi.