Cours 14 — Valeurs propres et vecteurs propres

- **Un exemple du théorème de Cayley-Hamilton**

On note I la matrice identité à 3 lignes et 3 colonnes : $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère la matrice suivante d'ordre 3 également : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer son polynome caractéristique $p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda\,\mathrm{I})$. Montrer qu'il est de la forme $p(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + cI$.

b) Calculer A^2 et A^3.

c) Démontrer que l'on a $p(A) = 0$, c'est à dire qu'on a la relation matricielle $-A^3 + aA^2 + bA + c\mathrm{I} = 0$, où I est la matrice identité d'ordre trois.

d) En déduire que A est inversible et calculer sa matrice inverse A^{-1}.

- **Un calcul de vecteurs propres**

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 11 \\ -4 & 14 & -4 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique réelle.

a) Montrer que ses valeurs propres sont -12, 6 et 18.

b) Calculer des vecteurs propres pour chacune des valeurs propres.

c) Montrer que les vecteurs propres peuvent être rangés dans une matrice de passage P que l'on précera (elle n'est pas unique...) dont les lignes d'une part et les colonnes d'autre part sont composées de vecteurs orthogonaux.

François Dubois et Chloé Mimeau, 11 janvier 2017.