le cnam

MVA101 - Devoir 1 - Suites et séries numériques

à rendre pour la séance numéro 4, le 19 octobre 2016

Exercice 1

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$ et $u_0 = -1$.

1. Calculer les termes de la suite de u_1 jusqu'à u_{10} (on pourra donner des valeurs approchées) et s'en servir pour avoir une première idée du comportement de la suite (u_n).
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n < 5$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante (on pourra pour cela se baser sur l'étude de la fonction $f(x) = \sqrt{(4x+5)} - x$, avec $x < 5$). En déduire la convergence de (u_n).
4. Montrer que la suite a pour limite 5. (Attention : le résultat de la question 2 ne suffit pas !)

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right)$ et $u_0 = 1$.

1. Calculer u_n pour $n = 1, 2, 3$
2. Montrer pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq u_n$ (on pourra pour cela se baser sur l'étude des fonctions $f(x) = \sqrt{5} - \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$ et $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x}) - x$ avec $x \geq 3$).
3. En déduire que la suite (u_n) est une suite convergente de limite $\sqrt{5}$.
4. Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.
5. En déduire une approximation de $\sqrt{5}$ à 0.0001 près. Que remarquez-vous ?

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right)$, $\quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \pi\mathbb{N}$

1. On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser :
   (a) La nature de la série $\sum u_n$.
   (b) La nature de la suite u_n.
2. (a) Si $a_n = \ln\left(n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, quelle est la nature de la série $\sum a_n$?
   Indice : développement limité de la fonction sinus en 0 :
   $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ (ici on pourra s'arrêter à l'ordre 3).
   (b) Plaçons-nous maintenant dans le cas où $a = 1$.
      i. Montrer que dans ce cas, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$
      ii. Donner alors la nature de la suite $\ln(u_n)$ et en déduire la nature de la suite (u_n).

François Dubois et Chloé Mimeau, 05 octobre 2016.