

Devoir numéro 4

A rendre pour la séance 13, le 04 janvier 2016

1) Transformée de Fourier de la Gaussienne

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation $f(t) = \exp(-t^2/2)$. On remarque que l'on a la relation (1) $f'(t) = -t f(t)$.

a) En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (1), montrer que la transformée de Fourier \hat{f} de la fonction f est solution de l'équation différentielle (2) $\frac{dy}{d\xi} = -\xi y(\xi)$.

b) On admet que la solution générale de l'équation (2) s'écrit $y(\xi) = C \exp(-\xi^2/2)$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2) dt = \sqrt{2\pi}$. En déduire que $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$ pour tout réel ω .

c) Soit $a > 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. On introduit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(t) = g(at)$. Montrer, à l'aide de la définition de transformée de Fourier, que $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{g}(\frac{\omega}{a})$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

d) On se donne $\sigma > 0$. Déduire des questions précédentes la transformée de Fourier $\hat{\varphi}(\omega)$ de la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$.

2) Systèmes linéaires [d'après Marco Caponigro]

On introduit les systèmes linéaires : (1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + my - z = -2 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$.

a) Résoudre le système (1).

b) Pour quelles valeurs du paramètre m le système linéaire (2) a-t-il une solution unique ?

c) Dans ce cas achever la résolution du système (2).

3) Calcul de l'inverse d'une matrice [d'après Nathalie Zanon]

On note I la matrice identité à 3 lignes et 3 colonnes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère la

matrice suivante d'ordre 3 également : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et A^3 .

b) Déterminer des nombres a, b et c tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$.

c) En déduire que A est inversible et calculer sa matrice inverse A^{-1} .