COURS 1

Systèmes dynamiques

François Dubois, mars 2003, édition 20 juillet 2006, 14 pages

ch ① Systèmes dynamiques.

1) Placement financier

- Si on dépose une quantité d'argent u_0 à la banque au temps $t_0 = 0$, et qu'on place cet argent à un taux $r > 0$, on sait qu'en vertu de la loi des intérêts composés, la masse monétaire disponible au temps $t \geqslant 0$ est donnée par une relation telle que

(1) $$u(t) = e^{rt} u_0, \quad t \geqslant 0.$$

La relation (1) utilise la fonction exponentielle $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \exp \theta \in \mathbb{R}$, fonction "élémentaire" bien connue dont une valeur approchée est disponible sur toutes les calculettes.

Nous insistons ici sur le fait que l'augmentation ~~du~~ de la masse d'argent u durant un temps dt est proportionnelle à u:

(2) $$\frac{du}{dt} = r u, \quad t > 0,$$

et que si on ajoute à la relation dynamique (2) le fait qu'au temps initial la quantité u est connue, id est

(3) $$u(0) = u_0,$$

le système (2)(3) composé de l'équation d'évolution et de la condition initiale définit complètement $u(t)$ via la relation (1).

- Nous remarquons enfin que si t croît vers $+\infty$, la quantité $u(t)$ croît aussi vers $+\infty$ puisque r est strictement positif. On dit qu'il y a <u>explosion en temps infini</u> pour le système dynamique (2)(3).

2) <u>Retour à l'équilibre</u>.

- On change le signe de r, on pose

$$(4) \qquad r = -\lambda \equiv -\frac{1}{T}, \quad \lambda > 0, \; T > 0 .$$

La dynamique (2) s'écrit alors

$$(5) \qquad \frac{du}{dt} + \lambda u = 0, \quad t \geqslant 0$$

et la solution du <u>système dynamique</u> composé de (5) et de la condition initiale (3) s'écrit

$$(6) \qquad u(t) = e^{-\lambda t}\, u_0, \quad t \geqslant 0 .$$

- Pour $t \to +\infty$, la solution (6) du système (5)(3) tend vers 0, valeur constante, ponctuelle, dans l'espace des états $\mathbb{R}$ du système dynamique. On parle alors de <u>point fixe</u>.

3) Oscillateur harmonique

- Un système mécanique simple composé d'une masse $m>0$ et d'un ressort de raideur $k>0$ est supposé avoir une abscisse nulle lorsqu'il est à l'équilibre. Si au temps $t=0$, on l'écarte de sa position d'équilibre d'une valeur x_0 et avec une vitesse v_0, ie

$$(7) \qquad x(0) = x_0 \, , \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \, ,$$

l'écart $x(t)$ suit pour $t>0$ une évolution dynamique donnée par la relation classique

$$(8) \qquad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \, , \quad t>0 \, .$$

La structure de ce modèle mathématique est analogue à celle du cas vu précédemment. On dispose d'une condition initiale (7) formée ici de deux équations scalaires et d'une équation d'évolution dynamique comportant des dérivées secondes.

- La solution du système (7)(8) est classique ; on pose

$$(9) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \, ,$$

et $t \mapsto x(t)$ est donné par la relation

(10) $\quad x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t \ , \ t \geq 0$.

- on constate que la fonction $t \mapsto x(t)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Si on introduit la vitesse $y(t)$ par la relation

(11) $\quad y(t) = \frac{dx}{dt}$,

on obtient facilement

(12) $\quad y(t) = -\omega\, x_0 \sin\omega t + v_0 \cos\omega t \ , \ t \geq 0$.

Pour $t \geq 0$, le point $(x(t), y(t))$ appartient à un espace $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ "abstrait" formé d'élongations et de vitesses, appelé "espace des phases". Il reste sur une ellipse dont l'équation s'obtient sans difficulté à partir des relations (10) et (12) :

(13) $\quad \left(x_0 x + \frac{1}{\omega^2} v_0 y\right)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(v_0 x - x_0 y\right)^2 = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)^2$

Pour cette raison, on dit que le comportement asymptotique du système (7)(8) est celui d'un cycle limite.

- L'emploi d'équations différentielles d'ordre deux (ou plus) est peu agréable en pratique, d'autant que la solution (13) est particulièrement simple dans le plan de phase (x, y). On pose donc

(14) $$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad u(t) \in \mathbb{R}^2$$

La relation (8) peut alors se réécrire sans difficulté $m \frac{dy}{dt} + kx = 0$, compte tenu de la relation (11). On constate alors que l'évolution du vecteur u est donnée par

(15) $$\frac{du}{dt} = A.u, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

avec une condition initiale qui prend la forme simple

(16) $$u(0) = u_0, \quad u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

- Le système masse - ressort (l'oscillateur harmonique) a une évolution qui s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre portant sur une inconnue vectorielle (à deux composantes) jointe à une condition initiale également vectorielle. On remarque que la solution (14) du système (15)(16) est donnée par les deux équations scalaires (10) et (11), relations qu'on peut exprimer aussi sous la forme

(17) $$u(t) = e^{tA} . u_0, \quad t \geq 0$$

en introduisant l'exponentielle de la matrice tA via la relation classique

(18) $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k, \quad t \geq 0.$$

4) Satellite

- L'apparition de cycles limites, de fonctions périodiques dans l'évolution dynamique d'une variable n'est pas limitée aux dynamiques linéaires vues jusqu'ici. Elles existent également comme en témoigne l'exemple suivant, fondé sur une dynamique à plus grande échelle. Une masse $m>0$ placée au point $x \in \mathbb{R}^3$ est soumise à la force d'attraction d'une planète (supposée fixe dans ce modèle) de masse M située en $x \equiv 0$. La force d'attraction F est donnée par la loi de l'attraction universelle

(19) $$F = -k \frac{Mm}{|x|^2} \frac{x}{|x|}$$

où $k>0$, et $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. De plus, l'évolution dynamique du vecteur $x(t)$ est décrite par l'équation d'évolution fondamentale

(20) $$m \frac{d^2x}{dt^2} = F, \quad t \geq 0.$$

La condition initiale porte maintenant sur la position x_0 et la vitesse initiale v_0.

(21) $$x(0) = x_0 \ , \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 .$$

• Comme $x(t) \in \mathbb{R}^3$, c'est encore le cas de $\frac{dx}{dt}$ et le bon cadre mathématique pour ce problème composé de l'équation d'évolution (20)(19) et de la condition initiale (21) est de chercher un vecteur $u(t) \equiv (x, \frac{dx}{dt})^t$ qui appartient à $\mathbb{R}^6$! [en plus précisément à $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ puisque la position $x=0$ est exclue de ce modèle simple qui remplace la planète par un objet ponctuel de masse M] Nous posons donc

(22) $$f(u) = \left(\frac{dx}{dt} \qquad -kM \frac{x}{|x|^3} \right)^t$$

et l'équation d'évolution prend la forme simple

(23) $$\frac{du}{dt} = f(u) \ , \quad u(t) \in \mathbb{R}^6 .$$

La condition initiale (21) s'écrit aussi

(24) $$u(0) = u_0 \equiv (x_0 \ , \ v_0)^t \in \mathbb{R}^6 .$$

• Le <u>système dynamique</u> (23)(24) est non-linéaire car la fonction $\mathbb{R}^6 \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}^6$ n'est pas linéaire, puisque

$f(u+v) \neq f(u)+f(v)$, $f(\lambda u) \neq \lambda f(u)$ en général. Cette non linéarité est due au coefficient $-kM/|x|^3$ du vecteur x au membre de droite de la relation (22). La solution $u(t)$ du système (23)(24) ne s'obtient pas par une simple exponentielle de matrice comme dans le cas linéaire (15). Il est d'ailleurs légitime de se poser la question de l'existence d'une solution de (23)(24), ainsi que celle de son unicité. Nous y reviendrons.

- Nous constatons que le mouvement d'un satellite est décrit mathématiquement par un système dynamique (23)(24) posé naturellement en dimension six. Si nous ne disposons pas de relation aussi simple que (13), nous savons (depuis Johannes Kepler,) que si l'énergie initiale $E(u_0)$, définie par

$$(25) \qquad E(u_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{kM}{|x|}$$

est plus petite que $E_0 = 0$,
alors le mouvement est elliptique. La trajectoire $x(t)$ suit une ellipse [dont l'origine est l'un des foyers], le mouvement est périodique. Lorsque t tend vers l'infini, le système dynamique (23)(24) fait apparaître un

cycle limite.

5) Explosion en temps fini.

• Si on se donne un système dynamique tel que (23)(24), la question de l'existence d'une solution $u(t)$ pour t tendant vers $+\infty$ est une bonne question. En effet, lorsque $f(\bullet)$ est linéaire, ie lorsque

(26) $$f(u) = A \cdot u, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

la matrice A est carrée d'ordre m, et la solution de

(27) $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u), & u(t) \in \mathbb{R}^m \\ u(0) = u_0, & u_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

est donnée par une série de type (18) :

(28) $$u(t) = e^{tA} \cdot u_0, \qquad t \geq 0$$

qui est toujours bien définie quel que soit l'instant $t \geq 0$. Par contre, lorsque f n'est pas linéaire, un modèle scalaire aussi simple que

(29) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2, & x \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

n'est pas défini pour tout $t>0$! En effet, la solution de (29) [au moins pour les temps $t>0$ assez petits, et la question de l'unicité reste posée !] est donnée par la fonction tangente :

$$(30) \qquad x(t) = \operatorname{tg} t,$$

ainsi que le montre un calcul élémentaire laissé au lecteur.

- Pour $t \geq \pi/2$, la solution du système dynamique (29) n'est plus définie. Il y a explosion en temps fini puisque $x(t)$ tend vers $+\infty$ si t tend vers $\pi/2$ par valeurs inférieures. Au delà de $t = \pi/2$, ce n'est plus l'équation (29) qui permet de définir la fonction tangente, mais le rapport $\operatorname{tg} t = \sin t / \cos t$.

6) Attracteur de Lorenz

- Nous avons vu qu'un système dynamique de la forme (27), posé dans un espace $\mathbb{R}^m$ de dimension finie (m est un entier qui vaut 1 pour le placement financier, le retour à l'équilibre ou l'explosion en temps fini, qui vaut 2 pour l'oscillateur harmonique et 6 pour le satellite) peut avoir plusieurs types de comportements quand le temps croît de plus en plus :

* explosion en temps fini : $u(t)$ n'est plus défini pour $t \geq T$, où $T>0$ est un temps caractéristique du système dynamique (27), par exemple parce que $u(t)$ tend vers l'infini pour $t \to T$ par valeurs inférieures
* explosion en temps infini : $u(t)$ est bien défini quel que soit $t>0$, mais lorsque t tend vers l'infini, $u(t)$ tend également vers l'infini.
* point fixe : $u(t)$ est défini pour tout $t>0$, et $u(t)$ tend vers une valeur limite $u_\infty \in \mathbb{R}^m$ lorsque t tend vers l'infini.
* cycle limite : comme plus haut, mais $u(t)$ devient périodique (de période $T>0$) lorsque t tend vers l'infini.

• On pourrait penser que ces comportements asymptotiques sont génériques et permettent de "décomposer" $\underbrace{\text{tout système dynamique (27)}}_{\text{la solution } u(\cdot) \text{ de}}$ lorsque le temps croît vers $+\infty$. Il n'en est rien. Les réflexions modernes sur le chaos, (et) la turbulence ont permis de mettre en évidence des systèmes dynamiques très simples dont le comportement lorsque t croît vers +∞ n'entre dans aucune des catégories précédentes.

- L'un des exemples les plus fameux, dû à Lorenz, météorologue anglais, en 1963, s'écrit avec <u>trois</u> équations différentielles couplées seulement :

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -Px + Py \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

Pour des paramètres P, r et b fixés selon les valeurs numériques

$$(32)\qquad P = 10 \qquad r = 28 \qquad b = \frac{8}{3}$$

et une condition initiale (x_0, y_0, z_0) donnée par exemple par

$$(33)\qquad x_0 = 1, \quad y_0 = z_0 = 0$$

l'évolution de $u(t) \equiv (x, y, z)^t(t)$ reste <u>bornée</u> dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $u(t)$ ne tend vers aucun point fixe, ne se rapproche d'aucun cycle limite, devient très <u>difficile à prédire</u> lorsque $t \to \infty$ et à ce propos, Lorenz avait évoqué le mouvement d'une mouette qui peut affecter l'évolution globale du système des équations de la météorologie. Toutefois, le point $u(t)$ ne remplit pas tout l'espace lorsque t croît, il se rapproche d'un "attracteur" Σ qui est un object géométriquement complexe, appelé "<u>attracteur étrange</u>" par les scientifiques qui l'ont mis en évidence. Son étude détaillée est bien entendu du cadre de ce cours d'introduction.

7) Théorème de Cauchy - Lipchitz.

- Nous terminons ce cours par l'énoncé ~~dit~~ (sous une forme simplifiée) du résultat fondamental pour la théorie des systèmes dynamiques. On se donne un entier m (la dimension de l'espace de configuration), une fonction continue f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$

(34) $\quad \mathbb{R}^m \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}^m$

qu'on suppose lipchitzienne : il existe

une constante $K>0$ (indépendante de u et v) de sorte que si $|u|$ désigne la norme euclidienne du vecteur u, c'est à dire

(35) $$|u| = \left(\sum_{j=1}^{m} u_j^2\right)^{1/2},$$

on a l'estimation

(36) $$|f(v) - f(u)| \leqslant K\,|v-u|, \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^m.$$

On se donne aussi un "point" $u_0 \in \mathbb{R}^m$, et on cherche $u(t) \in \mathbb{R}^m$ de sorte que

(37) $$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t>0, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

(38) $$u(0) = u_0, \quad u_0 \in \mathbb{R}^m.$$

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui utilise de manière essentielle que l'ensemble des nombres réels est "complet", ie n'a pas de trou, ou encore qu'une série telle que (18) est convergente, affirme que dans les conditions précédentes, et en particulier l'hypothèse (36), qu'il existe une constante $T>0$ (qui dépend de K) de sorte que pour $t \in [0,T]$, le système dynamique (37)(38) <u>possède une solution unique</u> $u(t)$.

F, mars 2003.