Cours 5

Conditions limites pour l'advection

1) Introduction
2) Le cas des caractéristiques "sortantes"
3) Le cas des caractéristiques "entrantes"
4) Remarques

François Dubois, mars 2003, édition 20 juillet 2006, 10 pages.

ch 5 $\boxed{\text{Conditions limites pour l'advection}}$

1) Introduction

- Nous fixons un nombre réel a (dont le signe n'est pas précisé) et nous étudions toujours l'équation d'advection

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Au lieu de supposer $x \in \mathbb{R}$, nous nous restreignons à un domaine spatial correspondant à $x > 0$. Par ailleurs, nous cherchons $u(\bullet, t)$ pour $t > 0$. La condition initiale $u_0(x)$ est donc définie là où x existe, ie pour $x \geqslant 0$:

(2) $$u(x,0) = u_0(x), \quad x \geqslant 0 .$$

- La question posée est toujours de même nature : la donnée d'une équation d'évolution (l'équation d'advection (1) ici, avec $x > 0$ et $t > 0$) et d'une condition initiale (via la relation (2)) permet-elle de définir $u(x,t) \in \mathbb{R}$ pour $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$ sans ambiguïté ? Avons-nous existence et unicité pour le problème (1)(2) posé dans le "quart d'espace"

$x > 0, t > 0$?

2) <u>Le cas des caractéristiques "sortants"</u>

- Nous supposons dans cette partie

(3) $\quad a < 0$.

Nous pouvons toujours utiliser la méthode des caractéristiques étudiée au chapitre précédent ; nous considérons des "courbes" $[0, \infty[\ni t \mapsto x(t) \in [0, \infty[$ satisfaisant à l'équation différentielle ordinaire

(4) $$\frac{dx}{dt} = a .$$

on sait qu'alors la fonction composée

(5) $$v(t) \equiv u(x(t), t)$$

est <u>constante</u> sur une telle courbe.

- Il convient d'étudier avec soin les solutions de l'équation (4). On rajoute d'abord une condition initiale $x(0) = y$, laquelle doit vérifier l'appartenance au quart d'espace :

(6) $$x(0) = y, \quad y \geq 0 .$$

on a alors, compte tenu de (4) et (6) :

(7) $$x(t) = at + y \quad , y \geq 0 , t \geq 0$$

et la condition $x(t) \geqslant 0$ (il faut que la caractéristique reste dans le domaine admissible!) est satisfaite pour

(8) $$0 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{a}\, y \,,$$

qui est bien cohérente puisque $a<0$. Au delà du temps $T = -y/a$, la droite caractéristique définie par (7) "sort" du domaine d'étude $\{(x,t),\, x>0,\, t>0\}$ puisque $x(t)$ devient négatif alors que t reste positif.

- Réciproquement, si on se donne (x,t) dans le quart-d'espace, i.e. $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, on peut toujours trouver une caractéristique passant par ce point et issue d'un point $(y,0)$ d'abscisse positive. Il suffit de résoudre l'équation

(9) $$at + y = x, \quad x \geqslant 0,\ t \geqslant 0$$

d'inconnue y, pour x et t fixés. On a alors simplement $y = x - at$ qui est toujours positif dès que $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$ puisque $-a$ est positif!

- La méthode des caractéristiques peut donc être pleinement utilisée dans ce cas de figure. Pour $(x,t) \in [0,\infty[^2$, on introduit y selon la relation (9). On tire alors de la constance de $v(\bullet)$ au cours du temps :

$$u(x,t) = v(t) = v(0) = u(y,0) = u_0(y) = u_0(x-at)$$

soit

$$(10) \quad u(x,t) = u_0(x-at), \quad x \geqslant 0, \, t \geqslant 0, \quad a<0$$

Cette valeur de la solution est nécessaire. On vérifie sans difficulté (exercice laissé au lecteur) que la relation (10) définit bien une solution du système (1)(2).

Proposition (1) Caractéristiques sortantes.
On étudie le système (1)(2) avec les conditions $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$. Lorsque $a<0$, ce système admet une unique solution $[0,\infty[\times [0,\infty[\ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ représentée par la relation (10).

- On obtient qu'aucune donnée n'est nécessaire sur la frontière $x=0$. Il n'y a pas de condition à la limite dans le cas d'une caractéristique sortante.

3) Le cas des caractéristiques "entrantes"

- Nous supposons dans ce paragraphe

(11) $\quad a > 0$.

Nous utilisons comme plus haut les caractéristiques, solution de (4)(6) et données par la relation (7). Cette fois, pour $y \geqslant 0$, on a toujours $x(t) \geqslant 0$ quelque soit $t \geqslant 0$, si $x(t)$ est donné par la relation (7). Toute la demi-droite caractéristique est incluse dans le domaine d'étude $[0, \infty[\times [0, \infty[$.

- Réciproquement, si on se donne (x, t) arbitraire dans ce domaine, existe-t-il une caractéristique (relation (7)) passant par ce point et coupant l'axe $t = 0$ en une abscisse y positive ? Peut-on toujours trouver une solution $y \geqslant 0$ à l'équation (9) ? La réponse est positive sous la condition

(12) $\quad x - at \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$

La méthode des caractéristique permet alors de conclure comme à la relation (10) :

(13) $\quad u(x,t) = u_0(x - at), \; x \geqslant 0, \; t \geqslant 0, \; x - at \geqslant 0, \; a > 0.$

- Dans le cas où la relation (12) n'est pas réalisée, ie lorsque

(14) $\qquad 0 \leqslant x \leqslant at \quad , a>0,$

la caractéristique passant par le point (x,t), d'équation $\theta \mapsto X(\theta)$

(15) $\qquad X(\theta) - x = a(\theta - t) \quad , \theta \geqslant 0, X(\theta) \geqslant 0$

ne reste $\geqslant 0$ que pour $\theta \geqslant t - \frac{x}{a}$.
Pour $\theta < t - \frac{x}{a}$, on a $X(\theta) < 0$
et la caractéristique "provient" d'états d'abscisse négative, ce qui est exclu par hypothèse. Il convient donc de considérer les caractéristiques passant par un point $(0,\theta)$ donné a priori, dont l'équation peut s'écrire, de façon analogue à (7)

(16) $\qquad x(t) = a(t-\theta) \quad , \quad t \geqslant \theta \quad , a>0.$

- Si on se donne (x,t) de sorte que (14) a lieu, il existe un unique $\theta \geqslant 0$ de sorte que

(17) $\qquad a(t-\theta) = x \quad , \qquad 0 \leqslant x \leqslant at, a>0,$

à savoir

(18) $\qquad \theta = t - \frac{x}{a}$.

Si on écrit que la fonction définie en (5) est constante sur une telle caractéristique, il vient

(19) $u(x,t) = v(t) = v(\theta) = u(x(\theta),\theta) = u(0, t-\frac{x}{a})$

La connaissance de $u(\cdot,\cdot)$ dans la région (14) demande de connaître $u(0,\theta)$ pour $\theta \geq 0$.

- on doit donc considérer une condition à la limite

(20) $u(0,t) = g(t), \quad t \geq 0$.

La relation (19) s'écrit alors

(21) $u(x,t) = g(t - \frac{x}{a}), \quad 0 \leq x \leq at, a > 0$

- La discussion est alors facile : ou on est dans l'hypothèse (12) et la condition initiale u_0 s'applique (relation (10)), ou bien on est dans l'hypothèse (14) et la condition à la limite g doit être mise en œuvre (relation (21)). Réciproquement, on peut vérifier sans peine que la fonction $u(x,t)$ définie par

(22) $u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-at), & x-at > 0 \\ g(t - \frac{x}{a}), & x-at < 0 \end{cases}$

est bien solution de l'équation (1), au moins pour tout (x,t) tel que $x \neq at$.

Proposition (2) Caractéristiques entrantes.

On étudie le système (1)(2)(20) avec les conditions $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Lorsque $a > 0$, ce système composé de l'équation d'advection (1), la condition initiale $u_0(\cdot)$ décrite en (2) et la condition à la limite $g(\cdot)$ donnée en (20) admet une unique solution $[0, \infty[\times [0, \infty[\ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ représentée à la relation (22).

- Lorsque la caractéristique est entrante ($a > 0$ pour un domaine $x \in]0, \infty[$), il faut se donner une condition à la limite à la frontière.

4) Remarques

- Le comportement qualitatif des solutions $u(\cdot,\cdot)$ de l'équation d'advection (1) dans le quart d'espace $x > 0$, $t > 0$ est très différent selon que $a < 0$ ou $a > 0$. Si $a < 0$, les caractéristiques solution de (4) "sortent" du domaine d'étude $x > 0$ si on les oriente avec un temps croissant. Si $a > 0$, ces mêmes caractéristiques "entrent" dans le domaine d'étude $x > 0$ dans les mêmes conditions. Dans le premier cas ($a<0$), on ne doit *pas* se donner de condition à la limite, ainsi que l'énonce la proposition 1. Dans le second ($a>0$), il *faut* se donner une valeur à la limite, une fonction $g(\cdot)$ comme "source" de la condition (20). Cette discussion qualitative est omniprésente dans les applications.

- La fonction définie à la relation (22) n'est a priori *pas* continue le long de la droite $x = at$, droite caractéristique passant par l'origine $(0,0)$. Ce n'est a priori pas gênant, quitte à introduire la notion de "solution faible" du système (1)(2)(20) (notion qui dépasse le niveau de ce cours d'introduction), on peut vérifier qu'effectivement $u(\cdot,\cdot)$ définie en (22) est une solution "faible", bien que discontinue. La discontinuité initiale (en $(0,0)$, où $u_0(0) \neq g(0)$) se propage sans déformation le long de la caractéristique correspondante. Si on ajoute une relation de "compatibilité" entre les données, à savoir

$$(23) \qquad u_0(0) = g(0),$$

on peut vérifier que la fonction définie en (22) est <u>continue</u> dans le quart d'espace $[0,\infty[\times[0,\infty[$. Avec la condition supplémentaire

$$(24) \qquad g'(0) + a\, u_0'(0) = 0 ,$$

on peut vérifier qu'elle est continuement dérivable, ce qui constitue un bon exercice laissé au lecteur.

D, mars 2002.