Cours 7

# Ondes acoustiques à une dimension d'espace

1) Linéarisation de la dynamique des gaz
2) Adimensionnement
3) Ecriture caractéristique
4) Solution du problème de Cauchy

François Dubois, juin 2003, édition 20 juillet 2006, 13 pages.

# Ch (7) Equation des ondes acoustiques à une dimension d'espace.

## 1) Linéarisation de la dynamique des gaz.

- L'évolution d'un gaz en évolution barotrope est décrit dans le cas d'une dimension d'espace avec les équations d'Euler. Les inconnues sont la densité $\rho$, fonction de la position $x$ et du temps $t$, ainsi que la vitesse $u$, fonction des mêmes variables. Les équations sont de deux types. On a d'une part la conservation de deux grandeurs physiques fondamentales, la masse et l'impulsion, qui, dans le cadre du formalisme de la mécanique des milieux continus et de l'hypothèse d'un fluide parfait, s'écrivent :

$$(1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + p(\rho)\right) = 0 .$$

On a d'autre part l'hypothèse d'une évolution barotrope qui exprime que la thermodynamique sous-jacente est simple.

Dans le cas d'une évolution <u>isentropique</u> et un gaz parfait <u>polytropique</u>, on désigne par $\gamma$ le rapport des chaleurs spécifiques ($\gamma = 7/5$ pour l'air), et par $p_0$, $\rho_0$ une pression et une densité de référence. On a alors

$$(3) \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} .$$

- Le système (1)(2)(3) des équations d'Euler isentropiques pour la dynamique des gaz est <u>non linéaire</u> à cause d'une part du terme "$\rho x^2$" dans l'équation (2) et d'autre part de son voisin "$p(\rho)$" qui est fonction non linéaire de $\rho$, compte tenu de (3). Leur étude mathématique est encore balbutiante, la raison essentielle étant que des <u>discontinuités</u>, des ondes de choc, peuvent apparaître au bout d'un temps fini, même en partant d'un profil régulier $\rho_0(x)$, $u_0(x)$ à l'instant initial:

$$(4) \qquad \big(\rho(x,0),\ u(x,0)\big) = \big(\rho_0(x),\ u_0(x)\big),\ x \in \mathbb{R} .$$

- En acoustique, la pression $p$ et la densité $\rho$ sont très proches de la pression $p_0$ et de la densité $\rho_0$ de référence. On a donc

$$(5) \qquad p - p_0 \simeq \left(\frac{dp}{d\rho}\right)(\rho_0)\,(\rho - \rho_0)$$

en <u>linéarisant</u> la loi d'état (3) autour de la densité $\rho_0$. On pose

$$(6) \qquad c_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)(\rho_0)}$$

avec $\rho \mapsto p(\rho)$ donné par la relation (3). On a le calcul classique :

$$\log \frac{p}{p_0} = \gamma \log \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \text{donc} \quad \frac{dp}{p_0} = \gamma \frac{d\rho}{\rho_0} \quad \text{et}$$

$\left(\dfrac{dp}{d\rho}\right)(\rho_0) = \gamma \dfrac{p_0}{\rho_0}$. Compte tenu de (6), on en déduit :

$$(7) \qquad c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

Dans les conditions usuelles de température ($T_0 \simeq 273\,K$) et de pression ($p_0 = 1$ atmosphère $= 10^5$ Pascals), on a $\rho_0 \simeq 1{,}29$ g/litre et $c_0 \simeq 330$ m/s.

- De même, la vitesse du fluide lors d'un écoulement acoustique est petite devant $c_0$ :

(8) $|u| \ll c_0$.

- on injecte les hypothèses (5) et (8) dans les équations aux dérivées partielles (1) et (2), en supposant aussi que la densité et la vitesse ont des variations faibles en espace et en temps. On peut alors négliger le terme non linéaire $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)$ devant le terme $\frac{\partial p}{\partial x}$. De plus, on développe la pression, ou plus exactement l'écart de pression $p'$ défini par

$$(9) \qquad p' \equiv p - p_0$$

en fonction de l'écart de densité $\rho'$ introduit selon

$$(10) \qquad \rho' \equiv \rho - \rho_0$$

grâce à la relation (5), maintenant supposée exacte :

$$(11) \qquad p' = c_0^2 \, \rho' .$$

On suppose également la vitesse $u$ petite, et on écrit l'hypothèse (8) sous la forme

$$(12) \qquad u = 0 + u' .$$

- On développe les relations (1) et (2) à l'aide de (9) à (12), en négligeant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à deux, et en remarquant que toute dérivée d'une constante est nulle. Il vient

$$(13) \qquad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

$$(14) \qquad \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

- Les équations (13) et (14) sont les équations de l'acoustique linéarisée autour de l'état $W_0 = (\rho_0, u_0 = 0)$. On enlève ensuite la notation avec des "prime" au bénéfice de lettres "non primées", en n'oubliant pas que la loi d'état linéarisée

$$(15) \qquad p = c_0^2 \rho$$

porte en fait sur les écarts de densité et de pression. On a donc

$$(16) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(17) \qquad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Les relations (15) à (17) sont par définition les équations de l'acoustique linéarisée à une dimension d'espace.

## 2) Adimensionnement.

- Un ordinateur ne manipule que des nombres sans dimension. Or les grandeurs physiques sont dimensionnées : seconde pour le temps, mètre pour la longueur, kilogramme pour la masse etc... Mais on peut choisir la référence qu'on veut et on en a l'entière liberté. Par contre, si on effectue un choix arbitraire, on peut changer l'apparence algébrique du système d'équations, donc les formules à programmer au sein d'un logiciel.

- on part du système (16)(17) des équations de l'acoustique linéaire à une dimension. on introduit une échelle de temps $t^*$, d'espace $x^*$, de vitesse $u^*$, de densité $\rho^*$, de pression $p^*$. Pour chacune de ces grandeurs physiques, on pose

$$(18) \qquad \tilde{\varphi} \equiv \varphi / \varphi^*, \quad \varphi \in \{t, x, u, \rho, p\}.$$

on utilise les variables (18) au sein de (16) et (17). Il vient

$$\frac{\rho^*}{t^*} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \rho_0 \frac{u^*}{x^*} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

$$\rho_0 \frac{u^*}{t^*} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{p^*}{x^*} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

c'est à dire

$$(19) \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} \quad \frac{u^* t^*}{x^*} \; \frac{\rho_0}{\rho^*} \; \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

$$(20) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{t^*}{u^* x^*} \; \frac{p^*}{\rho_0} \; \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = 0 .$$

- on souhaite la forme algébrique la plus simple, ie qui un maximum de coefficients dans les relations (19) et (20) soient égaux à un. Un choix <u>possible</u> est le suivant

$$(21) \qquad u^* = \frac{x^*}{t^*}$$

$$(22) \qquad \rho^* = \rho_0 .$$

On reporte ce choix dans le second terme de la relation (20). Il vient $\frac{t^*}{u^* x^*} = \frac{1}{(u^*)^2}$ et on peut relier cette échelle de vitesse $u^*$ à une vitesse présente dans les données physiques, à savoir

$$(23) \qquad u^* = c_0 .$$

Il est alors naturel de rendre égal à l'unité le coefficient présent devant $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x}$ à la relation (20). C'est le cas lorsque

$$(24) \qquad p^* = \rho_0 \, c_0^2 = \gamma p_0$$

- On notera bien que $p^* \neq p_0$ avec le choix proposé en (24). En effet, $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$, donc $p^* = \gamma p_0$. Si on fait le choix, en apparence plus naturel

(25) $\qquad p^* = p_0$,

alors l'équation (20) devenue adimensionnée prend la forme, compte tenu de (21) à (23) :

(26) $$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = 0,$$

ce qui n'est pas la forme la plus simple à moins de changer l'échelle de vitesse (23), pour faire disparaître le coefficient $\gamma$ qui complique inutilement la relation (26).

- Avec le choix (24), on a aussi

$$\tilde{p} = \frac{p}{p^*} = \frac{p}{\gamma p_0} = \frac{c_0^2}{\gamma p_0}\rho = c_0^2\frac{\rho_0}{\gamma p_0}\tilde{\rho} = \tilde{\rho}$$

et l'équation d'état sans dimension prend avec le choix (24) la forme très simple suivante

(27) $$\tilde{p} = \tilde{\rho}$$

Avec le choix (21) à (24), l'acoustique sans dimension prend finalement la forme

(28) $$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

(29) $$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = 0.$$

## 3) Ecriture caractéristique.

- Nous écrivons le système (16)(17), joint à la loi d'état (15), sous la forme d'un <u>système</u> hyperbolique de lois de conservation. On pose pour cela

(30) $$W = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}$$

Alors les relations (16)(17) s'écrivent aussi

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \end{aligned} \right.$$

soit sous forme d'un système d'inconnue W:

(31) $$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0 .$$

avec une matrice A deux par deux donnée par

(32) $$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 c_0^2 \\ 1/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- On pose

(33) $$r_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\rho_0 c_0} \end{pmatrix} , \quad r_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\rho_0 c_0} \end{pmatrix} .$$

On a alors

(34) $$A r_+ = c_0 r_+ , \quad A r_- = -c_0 r_-$$

qui met en évidence les deux valeurs propres $c_0$ et $-c_0$ de la matrice A, ainsi que les vecteurs propres associés, $r_0$ et $-r_0$ respectivement.

- On écrit le vecteur W donné en (30) dans la base (33) des vecteurs propres. Il vient après deux lignes de calcul, laissées au lecteur :

$$(35) \quad W = (p + \rho_0 c_0 u)\, r_+ + (p - \rho_0 c_0 u)\, r_- .$$

Les variables caractéristiques $\varphi_+$ et $\varphi_-$ sont par définition les composantes scalaires de W dans la décomposition (35). On a :

$$(36) \qquad \varphi_+ = p + \rho_0 c_0 u$$

$$(37) \qquad \varphi_- = p - \rho_0 c_0 u$$

$$(38) \qquad W \equiv \varphi_+ \, r_+ + \varphi_- \, r_- .$$

- Si on injecte la représentation (38) dans l'équation sous forme matricielle (31), on ne dérive pas par rapport à l'espace et au temps les vecteurs propres, supposés constants, donc

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_+}{\partial t}\, r_+ + \frac{\partial \varphi_-}{\partial t}\, r_- ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_+}{\partial x}\, r_+ + \frac{\partial \varphi_-}{\partial x}\, r_- ,$$

$$A \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} A \cdot r_+ + \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} A \cdot r_-$$

$$= \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} c_0 r_+ + \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} (- c_0 r_-)$$

compte tenu de la relation (34), donc

$$(39) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = \left( \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} \right) r_+ + \left( \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \right) r_-$$

La relation (31) exprime que le membre de droite de la relation (39) est le vecteur nul. Celui ci est décomposé dans la base $(r_+, r_-)$, donc ses composantes sont nulles, et

$$(40) \quad \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} = 0$$

$$(41) \quad \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} = 0 .$$

- Les relations (40) et (41) sont <u>équivalents</u> au système (16)(17) ou (31). Elles expriment que la variable caractéristique $\varphi_+$ est solution d'une advection de célérité $+c_0$ et que $\varphi_-$ suit une advection de célérité $-c_0$. Les équations (40) et (41) sont <u>découplées</u>.

## 4) Solution du problème de Cauchy.

- Le problème de Cauchy consiste à résoudre le système de l'acoustique (16)(17) pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ avec une condition initiale

$$(42) \qquad \rho(x,0) = \rho^0(x), \qquad u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

sans oublier que la pression acoustique $p$ est reliée à l'écart de densité $\rho$ via la relation (15).

- On utilise la forme caractéristique (40)(41) des équations acoustiques. On introduit pour cela les variables caractéristiques $\varphi_+$ et $\varphi_-$ à l'aide des relations (36) et (37), et en particulier leurs conditions initiales

$$(43) \quad \varphi_+^0 = p^0(x) + \rho_0 c_0\, u^0(x), \quad \varphi_-^0 = p^0(x) - \rho_0 c_0\, u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On note également que les relations (36) et (37) s'inversent en

$$(44) \qquad p = \frac{1}{2}(\varphi_+ + \varphi_-), \quad u = \frac{1}{2\rho_0 c_0}(\varphi_+ - \varphi_-).$$

- La résolution du système (40)(41), joint à la condition initiale (42), écrite à l'aide de (43) sous la forme

$$(45) \quad \varphi_+(x,0) = \varphi_+^0(x), \quad \varphi_-(x,0) = \varphi_-^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

est très facile avec la méthode des caractéristiques décrite au chapitre 4. On a, compte tenu de (40) et de la première relation de (45) :

(46) $\varphi_+(x,t) = \varphi_+^0(x - c_0 t), \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0$.

De même, compte tenu de (41) et de la seconde relation de (45), il vient par la méthode des caractéristiques :

(47) $\varphi_-(x,t) = \varphi_-^0(x + c_0 t), \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0$.

- On tire alors de (44), (46) et (47), une expression de la pression et de la vitesse :

(48) $p(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_+^0(x - c_0 t) + \varphi_-^0(x + c_0 t)\right)$

(49) $u(x,t) = \frac{1}{2\rho_0 c_0}\left(\varphi_+^0(x - c_0 t) - \varphi_-^0(x + c_0 t)\right)$

Il suffit enfin de remplacer $\varphi_+^0$ et $\varphi_-^0$ par leurs expressions proposées à la relation (43) :

(50) $$\left\{ \begin{aligned} p(x,t) = {} & \frac{1}{2}\left(p^0(x - c_0 t) + p^0(x + c_0 t)\right) \\ & + \frac{1}{2}\rho_0 c_0\left(u^0(x - c_0 t) - u^0(x + c_0 t)\right) \end{aligned} \right.$$

(51) $$\left\{ \begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{2}\left(u^0(x - c_0 t) + u^0(x + c_0 t)\right) \\ & + \frac{1}{2\rho_0 c_0}\left(p^0(x - c_0 t) - p^0(x + c_0 t)\right). \end{aligned} \right.$$

On a ainsi une solution <u>explicite</u> du système (16)(17) avec une condition initiale (42) posée sur la droite réelle complète.

FD, juin 03.