Cours 9

Méthode HaWAY

1) Maillage
2) Discrétisation
3) Erreur de troncature

François Dubois, juin 2003, édition 20 juillet 2006, 8 pages.

ch 9 Méthode HaWAY

1) Maillage.

- L'intervalle $[0,L]$ est découpé en J mailles de même dimension ; on pose

(1) $$\Delta x = \frac{L}{J}.$$

on introduit les $(J+1)$ points en espace qui délimitent les J intervalles précédents :

(2) $$x_j = j\,\Delta x, \quad 0 \le j \le J$$

ainsi que les milieux $x_{j+1/2}$ des mailles précédentes :

(3) $$x_{j+1/2} = \left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta x \quad , \quad 0 \le j \le J-1.$$

- On introduit un pas de temps Δt, les points t^n en temps correspondants

(4) $$t^n = n\,\Delta t, \quad n \geqslant 0$$

ainsi que les "demi-pas de temps" :

(5) $$t^{n+1/2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t \quad , \quad n \geqslant 0.$$

2) Discrétisation.

- La méthode HaWAY utilise des grilles décalées en vitesse en pression, le nom HaWAY est celui des auteurs de la méthode : Harlow et Welsch (fluides à frontière libre), Arakawa (modèles numériques de l'atmosphère), Yee (équations de Maxwell), qui ont eu cette idée, au milieu des années soixante. On cherche la vitesse aux points entiers en vitesse et demi-entiers en temps :

(6) $$u_j^{n+1/2} \simeq u(x_j, t^{n+1/2}), \; 0 \leq j \leq J, \; n \geq 0$$

et la pression aux points demi-entiers en espace et entiers en temps :

(7) $$p_{j+1/2}^{n} \simeq p(x_{j+1/2}, t^{n}), \; 0 \leq j \leq J-1, \; n \geq 0$$

on note qu'on dispose de J+1 variables en vitesse et seulement J en pression.

- On écrit les équations de l'acoustique linéarisée à une dimension d'espace sous une forme adimensionnée

(8) $$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(9) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

- on écrit l'équation (8) de conservation de la masse autour du point $(x_{j+1/2}, t^{n+1/2})$:

(10) $$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} \simeq \frac{1}{\Delta t}\left(p_{j+1/2}^{n+1} - p_{j+1/2}^{n}\right)$$

(11) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} \simeq \frac{1}{\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j}^{n+1/2}\right)$$

et on ajoute ces deux expressions pour former une approximation discrète de l'équation (8) :

(12) $$\frac{1}{\Delta t}\left(p_{j+1/2}^{n+1} - p_{j+1/2}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j}^{n+1/2}\right) = 0,$$

$$0 \leq j \leq J-1.$$

- Cette équation permet le calcul explicite d'une "nouvelle" pression $p_{j+1/2}^{n+1}$ en fonction de "l'ancienne" pression p_j^{n+1} et des deux vitesses déjà calculées :

(13) $$p_{j+1/2}^{n+1} = p_{j+1/2}^{n} - \sigma\left(u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j}^{n+1/2}\right)$$

en introduisant le nombre de Courant σ ;

(14) $$\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

- on discrétise l'équation (9) de transfert de l'impulsion autour du point "bi-entier" (x_j, t^n) :

$$(15) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1/2} - u_j^{n-1/2}\right)$$

$$(16) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x}\left(p_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n\right)$$

et on ajoute les deux expressions précédentes pour former une version discrète de l'équation (9) :

$$(17) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1/2} - u_j^{n-1/2}\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(p_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n\right) = 0 \,, \quad 1 \leq j \leq J-1.$$

- on note qu'on ne peut pas écrire cette relation pour <u>toutes</u> les vitesses à cause des conditions aux limites en $j=0$ et $j=J$. Nous y reviendrons. Comme pour l'évolution de la pression, la relation (17) permet un calcul <u>explicite</u> de la nouvelle vitesse $u_j^{n+1/2}$ en fonction de l'ancienne $u_j^{n-1/2}$ et des pressions calculées au demi-pas de temps précédent :

$$(18) \quad u_j^{n+1/2} = u_j^{n-1/2} - \sigma\left(p_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n\right), \quad 1 \leq j \leq J-1.$$

3) Erreur de troncature

- On définit l'erreur de troncature $\tau_{j+1/2}^{n+1/2}$ (respectivement τ_j^n) en appliquant le schéma (12) (respectivement le schéma (17)) à une solution exacte $v(x,t)$, $q(x,t)$ du système (8)(9). On pose d'abord

$$(19) \quad v_j^{n+1/2} \equiv v(x_j, t^{n+1/2})$$

$$(20) \quad q_{j+1/2}^n \equiv q(x_{j+1/2}, t^n);$$

l'erreur de troncature est l'expression (non-nulle !) obtenue en remplaçant les $u_k^{l+1/2}$ et $p_{k+1/2}^l$ du schéma par les valeurs interpolées (19)(20) aux points de grille de la solution exacte. On pose

$$(21) \quad \tau_{j+1/2}^{n+1/2} \equiv \frac{1}{\Delta t}\left(q_{j+1/2}^{n+1} - q_{j+1/2}^n\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}\right)$$

$$(22) \quad \tau_j^n \equiv \frac{1}{\Delta t}\left(v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2}\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(q_{j+1/2}^n - q_{j-1/2}^n\right).$$

- Les expressions (21)(22) sont a priori <u>non nulles</u> car il n'y a aucune raison pour que les équations du schéma soient vérifiées par la solution exacte. On a toutefois les développements limités suivants :

(23) $\tau_{j+1/2}^{n+1/2} = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$

(24) $\tau_j^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$

si la solution (u, p) de (8)(9) est assez régulière. On dit que la méthode Harlow est <u>d'ordre deux</u> en espace et en temps.

- la preuve de la relation (23) est élémentaire à l'aide de la formule de Taylor :

$$q_{j+1/2}^{n+1} = q_{j+1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + O(\Delta t^3).$$

et de même

$$q_{j+1/2}^{n} = q_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + O(\Delta t^3)$$

ce qui conduit à

(25) $$\frac{1}{\Delta t}\left(q_{j+1/2}^{n+1} - q_{j+1/2}^{n}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + O(\Delta t^2).$$

On fait un calcul analogue pour les valeurs interpolées du champ de vitesse :

$$v_{j+1}^{n+1/2} = v_{j+1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + O(\Delta x^3)$$

$$v_j^{n+1/2} = v_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + O(\Delta x^3)$$

soit par différence entre les deux lignes précédentes :

$$(26) \quad \frac{1}{\Delta x}\left(v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + O(\Delta x^2)$$

On ajoute les relations (25) et (26), sans oublier la définition (21) de l'erreur de troncature. Il vient

$$(27) \quad \tau_{j+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1/2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

et la conclusion (23) est une conséquence claire du fait que $q(x,t)$, $v(x,t)$ est solution exacte continue de la conservation de la masse

$$(28) \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \; t > 0,$$

écrite au point doublement demi-entier : $(x_{j+1/2}, t^{n+1/2})$.

- On effectue un calcul analogue pour démontrer la relation (24) :

$$v_j^{n+1/2} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{8}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_j^n + O(\Delta t^3)$$

$$v_j^{n-1/2} = v_j^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{8}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_j^n + O(\Delta t^3) .$$

Donc par différence et division par Δt :

$$(29) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_j^n + O(\Delta t^2) .$$

On a pour la pression :

$$q_{j+1/2}^n = q_j^n + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_j^n + \frac{\Delta x^2}{8}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right)_j^n + O(\Delta x^3)$$

$$q_{j-1/2}^n = q_j^n - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_j^n + \frac{\Delta x^2}{8}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right)_j^n + O(\Delta x^3) ,$$

donc

$$(30) \quad \frac{1}{\Delta x}\left(q_{j+1/2}^n - q_{j-1/2}^n\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_j^n + O(\Delta x^2) .$$

On ajoute les relations (29) et (30), en prenant en compte la relation (22) qui définit l'erreur de troncature. Il vient

$$(31) \quad \tau_j^n = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_j^n + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_j^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) ,$$

ce qui est identique à (24), puisque la solution exacte vérifie la conservation de l'impulsion

$$(32) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 , \quad 0 < x < L , \; t > 0$$

au point (x_j, t^n) "doublement entier".

FD juin 2003.