Chapitre 1

Systèmes dynamiques

1) Placement financier

• On dépose une quantité d'argent u_0 à la banque à l'instant $t_0 = 0$ et on place cet argent à un taux $r > 0$. On sait qu'en vertu de la loi des intérêts composés, la masse monétaire disponible au temps $t \geq 0$ est donnée par une relation telle que

$$(1) \qquad u(t) \;=\; \mathrm{e}^{r\,t}\, u_0 \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

La relation (1) utilise la fonction exponentielle $\mathbb{R} \ni \theta \longmapsto \exp\theta \in \mathbb{R}$, fonction "élémentaire" bien connue dont une valeur approchée est disponible sur toutes les calculettes. Nous insistons ici sur le fait que l'augmentation $\mathrm{d}u$ de la masse d'argent u durant le temps $\mathrm{d}t$ est proportionnelle à u :

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \;=\; r\,u \,, \qquad t > 0 \,,$$

et que si l'on ajoute à la relation dynamique (2) le fait qu'au temps initial la quantité u est connue, *id est*

$$(3) \qquad u(0) \;=\; u_0 \,,$$

alors le système (2) (3) composé de l'**équation d'évolution** (2) et de la **condition initiale** (3) définit complètement la fonction $u(t)$ aussi bien qu'avec la relation (1).

• Nous remarquons enfin que si le temps t croît de plus en plus (c'est à dire $t \longrightarrow +\infty$), la quantité $u(t)$ croît aussi vers $+\infty$ puisque r est strictement positif. On dit qu'il y a **explosion en temps infini** pour le système dynamique (2) (3). Mais on sait que l'infini de la richesse reste à jamais lointain !

2) Retour à l'équilibre

• On change le signe de r, on pose

$$(4) \qquad r \;=\; -\lambda \;\equiv\; -\frac{1}{T} \,, \qquad \lambda > 0 \,, \quad T > 0 \,.$$

La dynamique (2) s'écrit alors

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\,u \;=\; 0 \,, \qquad t > 0 \,,$$

et la solution du **système dynamique** composé de (5) et de la condition initiale (3) s'écrit

$$(6) \qquad u(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\, u_0 \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

• Pour $t \longrightarrow +\infty$, la solution (6) du système (5) (3) tend vers zéro, valeur constante, ponctuelle, dans l'espace des états $\mathbb{R}$ du système dynamique. On parle alors de **point attracteur** ou de **convergence vers un point fixe**.

3) Oscillateur harmonique

• Un système mécanique simple composé d'une masse m suspendue à un ressort de raideur $k > 0$ est supposé avoir une abscisse x nulle lorsqu'il est à l'équilibre. Si au temps $t = 0$, on l'écarte de sa position d'équilibre d'une valeur x_0 et avec une vitesse initiale v_0, c'est à dire

$$(7) \qquad x(0) \;=\; x_0 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) \;=\; v_0 \,,$$

l'écart $x(t)$ suit au cours du temps $t > 0$ une évolution dynamique donnée par la relation classique

$$(8) \qquad m\, \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \;+\; k\, x(t) \;=\; 0 \,, \qquad t > 0 \,.$$

La structure de ce modèle mathématique est analogue à celle du cas vu précédemment. On dispose d'une condition initiale (7) formée ici de deux équations scalaires et d'une équation d'évolution dynamique comportant des dérivées secondes.

• La solution du système (7) (8) est classique ; on pose

$$(9) \qquad \omega \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}} \,,$$

et la fonction $t \longmapsto x(t)$ est donnée par la relation

$$(10) \qquad x(t) \;=\; x_0 \, \cos(\omega\, t) \;+\; \frac{v_0}{\omega} \, \sin(\omega\, t) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

On constate que la fonction $t \longmapsto x(t)$ est **périodique** de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Si on introduit la vitesse $y(t)$ au moyen de la relation

$$(11) \qquad y(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,,$$

on obtient facilement

$$(12) \qquad y(t) \;=\; v_0 \, \cos(\omega\, t) \;-\; \omega\, x_0 \, \sin(\omega\, t) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Pour $t \geq 0$, le point $(x(t),\, y(t))$ appartient à un espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ "abstrait" formé d'élongations et de vitesses, appelé "espace des phases". Le point $(x(t),\, y(t))$ reste sur une ellipse dont l'équation s'obtient sans difficulté à partir des relations (10) et (12) en extrayant $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$:

$$(13) \qquad \Big(x_0\, x \,+\, \frac{1}{\omega^2}\, v_0\, y \Big)^2 \,+\, \frac{1}{\omega^2} \Big(v_0\, x \,-\, x_0\, y \Big)^2 \,=\, \Big(x_0^2 \,+\, \frac{v_0^2}{\omega^2} \Big)^2 .$$

Pour cette raison, on dit que le comportement asymptotique du système (7) (8) est celui d'un **cycle limite**.

• L'emploi d'équations différentielles d'ordre deux (ou plus) est peu agréable en pratique, d'autant que la solution (13) est particulièrement simple dans le plan de phase $(x,\, y)$. On introduit donc le vecteur colonne $u(t)$ selon :

$$(14) \qquad u \,=\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},2}$$

où $\mathbb{R}^{\mathrm{t},2}$ désigne l'espace des vecteurs colonnes à deux lignes. La relation (8) peut alors se réécrire sans difficulté $m\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \,+\, kx \,=\, 0$, compte tenu de la relation (11). On constate alors que l'évolution du vecteur u est donnée par

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \,=\, A \bullet u\,, \qquad A \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

avec une condition initiale qui prend la forme plus globale

$$(16) \qquad u(0) \,=\, u_0\,, \qquad u_0 \,=\, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \,\in\, \mathbb{R}^{\mathrm{t},2}\,.$$

Le système masse-ressort (l'oscillateur harmonique) a une évolution qui s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre portant sur une inconnue vectorielle (à deux composantes) jointe à une condition initiale également vectorielle. On remarque que la solution (14) du système (15) (16) est donnée par les deux équations scalaires (10) et (12), relations qu'on peut exprimer aussi sous la forme

$$(17) \qquad u(t) \,=\, \mathrm{e}^{t\,A} \bullet u_0\,, \qquad t \geq 0\,,$$

en introduisant l'exponentielle de la matrice tA *via* la relation classique

$$(18) \qquad \mathrm{e}^{tA} \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, (t\,A)^k\,, \qquad t \geq 0\,.$$

4) Satellite

• L'apparition de cycles limites, de fonctions périodiques dans l'évolution dynamique d'une variable n'est pas limitée aux dynamiques linéaires vues jusqu'ici. Elles existent également pour des dynamiques **non** linéaires, comme en témoigne l'exemple suivant, qui décrit le monde à une plus grande échelle. Une masse $m > 0$ placée au point $x \equiv (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est soumise à la force d'attraction d'une planète, supposée fixe dans ce modèle, de masse M située en $x \equiv 0$. La force d'attraction F est donnée par la "loi de l'attraction universelle"

$$(19) \qquad F \;=\; -k\,\frac{m\,M}{\mid x \mid^2}\,\frac{x}{\mid x \mid}$$

où $k > 0$ et $\mid x \mid = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. De plus, l'évolution dynamique du vecteur $x(t)$ est décrite par l'équation d'évolution fondamentale

$$(20) \qquad m\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \;=\; F\,, \qquad t \geq 0\,.$$

• La condition initiale porte maintenant sur la position x_0 et la vitesse initiale v_0 :

$$(21) \qquad x(0) \;=\; x_0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) \;=\; v_0\,.$$

Comme $x(t) \in \mathbb{R}^3$, c'est encore le cas pour $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et le bon cadre mathématique pour ce problème composé de l'équation d'évolution (20) (19) et de la condition initiale (21) est de chercher un vecteur $u(t) \equiv (x\,,\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^{\mathrm{t}}$ qui appartient à $\mathbb{R}^{\mathrm{t},6}$ (ou plus précisément à l'espace $\mathbb{R}^{\mathrm{t},3} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{\mathrm{t},3}$ puisque la position $x = 0$ est exclue de ce modèle simple qui remplace la planète par un objet ponctuel de masse M). Nous posons donc

$$(22) \qquad u \;=\; (x\,,\, y)^{\mathrm{t}}\;, \quad f(u) \;=\; \Big(y\,,\, -k\,M\,\frac{x}{\mid x \mid^3}\Big)^{\mathrm{t}} \;\in \mathbb{R}^{\mathrm{t},6}$$

et l'équation d'évolution du satellite prend maintenant la forme générale

$$(23) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \;=\; f(u)\,, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},6}\,.$$

La condition initiale (21) s'écrit aussi

$$(24) \qquad u(0) \;=\; u_0 \;\equiv\; (x_0\,,\, v_0) \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},6}\,.$$

• Le **système dynamique** (23) (24) est **non linéaire** car la fonction $\mathbb{R}^{t,6} \ni u \longmapsto f(u) \in \mathbb{R}^{t,6}$ n'est pas linéaire. En effet, $f(u+v) \neq f(u)+f(v)$ et $f(\lambda\, u) \neq \lambda\, f(u)$ en général. Cette non linéarité est due au coefficient non constant $-k\,M \,/\, \mid x \mid^3$ devant le vecteur x au membre de droite de la relation (22). La solution $u(t)$ du système (23) (24) ne s'obtient pas par ne simple exponentielle de matrice comme dans le cas linéaire (15). Il est d'ailleurs légitime de se poser la question de l'**existence** d'une solution du système d'équations (23) (24), ainsi que celle de son **unicité**. Nous y reviendrons.

• Nous constatons que le mouvement d'un satellite est décrit mathématiquement par un système dynamique (23) (24) posé naturellement en dimension six. Si nous ne disposons pas de relation aussi simple que (13), nous savons (depuis Johannes Kepler, *Astronomia Nova*, 1609) que si l'énergie initiale $E(u_0)$, définie par

$$E(u_0) \;\equiv\; \frac{1}{2} \mid v_0 \mid^2 \;-\; \frac{k\,M}{\mid x_0 \mid} \qquad (25)$$

est plus petite que $E_0 = 0$, alors le mouvement est elliptique. La trajectoire $x(t)$ suit une ellipse dont l'origine occupe l'un des foyers et le mouvement est périodique. Lorsque t tend vers l'infini, le système dynamique (23) (24) fait apparaître un **cycle limite**.

5) Explosion en temps fini

• Si on se donne un système dynamique tel que (23) (24), la question de l'existence d'une solution $u(t)$ pour t tendant vers $+\infty$ est une bonne question. En effet, lorsque la fonction $f(\bullet)$ est linéaire, *id est* lorque

$$f(u) \;=\; A \bullet u\,, \qquad u \in \mathbb{R}^{t,m} \qquad (26)$$

avec une matrice A carrée d'ordre m, la solution du système

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \;&=\; f(u)\,, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^{t,m} \\ u(0) \;&=\; u_0\,, \qquad u_0 \in \mathbb{R}^{t,m} \end{aligned} \right. \qquad (27)$$

est donnée par une série du type de celle de la relation (18) :

$$u(t) \;=\; \mathrm{e}^{tA} \bullet u_0\,, \qquad t \geq 0 \qquad (28)$$

qui est toujours bien définie quel que soit l'instant $t \geq 0$. Par contre, lorsque la fonction f n'est pas linéaire, un modèle scalaire aussi simple que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;&=\; 1 + x^2\,, \qquad t > 0\,, \quad x(t) \in \mathbb{R} \\ x(0) \;&=\; 0 \end{aligned} \right. \qquad (29)$$

n'est pas défini pour tout temps t strictement positif ! En effet, **la** solution de (29) [au moins pour des temps $t > 0$ assez petits, et la question de l'unicité reste posée !] est donnée par la fonction tangente :

$$(30) \qquad x(t) \;=\; \mathrm{tg}\, t\,,$$

ainsi que le montre un calcul élémentaire laissé au lecteur. Pour $t \geq \frac{\pi}{2}$, la solution du système dynamique (29) n'est plus définie. Il y a **explosion en temps fini** puisque $x(t)$ tend vers $+\infty$ si t tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures. Au delà de $t = \frac{\pi}{2}$, ce n'est plus l'équation (29) qui permet de définir la fonction "tangente", mais le rapport "sinus" sur "cosinus".

6) Attracteur de Lorenz

• Nous avons vu qu'un système dynamique de la forme (27), posé dans un espace de dimension finie m (m est un entier qui vaut l'unité pour l'exemple du placement financier, le retour à l'équilibre ou l'explosion en temps fini, qui vaut deux pour l'oscillateur harmonique et six pour le satellite) peut avoir plusieurs types de comportements quand le temps croît de plus en plus :

$\star$ explosion en temps fini : $u(t)$ n'est plus défini pour $t \geq T$, où $T > 0$ est un temps caractéristique du système dynamique (27), par exemple parce que $u(t)$ tend vers l'infini pour $t \longrightarrow T$ par valeurs inférieures.

$\star$ explosion en temps infini : $u(t)$ est bien défini quel que soit $t > 0$, mais lorsque t tend vers l'infini, $u(t)$ tend également vers l'infini.

$\star$ attraction vers un point fixe : $u(t)$ est défini pour tout $t > 0$, et $u(t)$ tend vers une valeur limite u_∞ lorsque t tend vers l'infini.

$\star$ cycle limite : comme plus haut, mais $u(t)$ devient petit à petit une fonction périodique (de période $T > 0$) lorsque t tend vers l'infini.

• On pourrait penser que ces comportements asymptotiques sont génériques et permettent de "décomposer" la solution $u(\bullet)$ de tout système dynamique (27) lorsque le temps croît vers l'infini. Il n'en est rien. Les réflexions modernes (1960) sur le chaos et la turbulence ont permis de mettre en évidence des systèmes dynamiques dont l'écriture algébrique est très simple avec un comportement lorsque t croît vers $+\infty$ qui n'entre dans aucune des catégories précédentes. L'un des exemples les plus fameux est dû à Lorenz, météorologue anglais, en 1963. Son "attracteur de Lorenz" s'écrit avec seulement **trois** équations différentielles non linéaires couplées :

(31) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -P\,x + P\,y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= r\,x - y - x\,z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \quad -b\,z + x\,y\,. \end{aligned} \right.$$

Pour des paramètres P, r, et b fixés selon les valeurs numériques

(32) $$P = 10\,, \qquad r = 28\,, \qquad b = \frac{8}{3}$$

et une condition initiale (x_0, y_0, z_0) donnée par exemple par

(33) $$x_0 = 1\,, \qquad y_0 = z_0 = 0\,,$$

l'évolution de $u(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{t}}$ reste **bornée** dans l'espace tridimensionnel. Le vecteur $u(t)$ ne tend vers aucun point fixe, ne se rapproche d'aucun cycle limite, devient **très difficile à prédire** lorsque $t \longrightarrow \infty$ et à ce propos, Lorenz avait évoqué le mouvement d'une mouette qui peut affecter l'évolution globale du système des équations de la météorologie. On conçoît donc que "prédire le temps qu'il fera demain" est un problème scientifiquement très difficile ! Toutefois, le point $u(t)$ ne remplit pas tout l'espace lorsque t croît ; il se rapproche d'un "attracteur étrange" Σ qui est un objet géométique complexe. Son étude détaillée sort bien entendu du cadre de cours d'introduction.

7) Théorème de Cauchy-Lipchitz

• Nous terminons ce chapitre par l'énoncé (sous une forme simplifiée) du résultat fondamental pour la théorie des systèmes dynamiques. On se donne un entier m (la dimension de "l'espace de configuration" du système étudié), une fonction continue f de $\mathbb{R}^{\mathrm{t},m}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathrm{t},m}$

(34) $$\mathbb{R}^{\mathrm{t},m} \ni u \longmapsto f(u) \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},m}$$

qu'on suppose lipchitzienne : il existe une constante $K > 0$ indépendante de u et v de sorte que si $\mid u \mid$ désiqne la norme euclidienne du vecteur u, c'est à dire

(35) $$\mid u \mid = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_j^2}\;, \qquad u \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},m}$$

on a l'estimation

(36) $$\mid f(v) - f(u) \mid \leq K \mid v - u \mid\,, \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},m}\,.$$

On se donne aussi un "point" $u_0 \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},m}$ et on cherche $u(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},m}$ de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \,=\, f(u)\,, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},m} \tag{37}$$

$$u(0) \,=\, u_0\,, \qquad u_0 \in \mathbb{R}^{\mathrm{t},m}\,. \tag{38}$$

Le théorème de Cauchy-Lipchitz, qui utilise de manière essentielle que l'ensemble des nombres réels est "complet", *id est* n'a pas de trou, ou encore qu'une "série" telle que (18) est convergente, affirme que sous les hypothèses précédentes, et en particulier l'hypothèse (36), qu'il existe une constante $T > 0$ (qui dépend de K) de sorte que pour tout $t \in [0,\, T]$, le système dynamique (37) (38) **possède une solution unique** $u(t)$.

FD, mars 2003, février 2005.