Introduction à l'acoustique numérique

Cours 11

Stabilité pour HaWAY

1) Rappels
2) Ondes
3) Critère de Von Neumann

François Dubois, juin 2003, édition 20 juillet 2006, 6 pages

Ch 11 Stabilité pour Harvey

1) Rappels.

- La méthode Harvey utilise une grille entrelacée en espace-temps entre la vitesse $u_j^{n+1/2}$ et la pression $p_{j+1/2}^{n}$. L'équation d'évolution discrète de la masse prend la forme adimensionnelle

$$(1)\quad \frac{1}{\Delta t}\left(p_{j+1/2}^{n+1} - p_{j+1/2}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j}^{n+1/2}\right) = 0$$

et l'évolution de l'impulsion s'écrit après discrétisation centrée

$$(2)\quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1/2} - u_j^{n-1/2}\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(p_{j+1/2}^{n} - p_{j-1/2}^{n}\right) = 0 .$$

- On écrit cette évolution sous forme matricielle avec un vecteur W. On pose

$$(3)\quad W_{j+\frac{1}{4}}^{n-\frac{1}{4}} = \begin{pmatrix} p_{j+1/2}^{n} \\ u_j^{n-1/2} \end{pmatrix}$$

Le calcul de $W_{j+1/4}^{n+3/4}$ utilise les relations (1) et (2) :

(4) $p_{j+1/2}^{n+1} = p_{j+1/2}^{n} - \sigma\left(u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j}^{n+1/2}\right)$

(5) $u_{j}^{n+1/2} = u_{j}^{n-1/2} - \sigma\left(p_{j+1/2}^{n} - p_{j-1/2}^{n}\right)$

On reporte (5) dans (4) pour écrire $W^{n+3/4}$ en fonction des $W^{n-1/4}$:

$$p_{j+1/2}^{n+1} = p_{j+1/2}^{n} - \sigma\Big[u_{j+1}^{n-1/2} - \sigma\left(p_{j+3/2}^{n} - p_{j+1/2}^{n}\right) - \left(u_{j}^{n-1/2} - \sigma\left(p_{j+1/2}^{n} - p_{j-1/2}^{n}\right)\right)\Big]$$

(6) $$p_{j+1/2}^{n+1} = (1-2\sigma^2)\, p_{j+1/2}^{n} + \sigma^2 p_{j+3/2}^{n} + \sigma^2 p_{j-1/2}^{n} - \sigma\left(u_{j+1}^{n-1/2} - u_{j}^{n-1/2}\right)$$

2) <u>Ondes</u>

- On suppose que le vecteur $W_{j+1/4}^{n-1/4}$ se présente ~~sous~~ la forme d'une onde de vecteur K et de la forme

(7) $$W_{j+1/4}^{n-1/4} = \begin{pmatrix} \widehat{p}(K) & e^{i(j+1/2)K\Delta x} \\ \widehat{u}(K) & e^{ijK\Delta x + \varphi} \end{pmatrix},$$

avec un nombre d'onde ξ donné par

(8) $$\xi = K\Delta x$$

et un déphasage φ.

On a alors

$$(9) \quad p^{n}_{j+1/2} = e^{-i\xi} \; p^{n}_{j+1/2}$$

$$(10) \quad u^{n-1/2}_{j+1} = e^{i\xi} \; u^{n-1/2}_{j}$$

et l'incrémentation d'un pas de temps à l'aide des relations (5) et (6) s'écrit :

$$u_j^{n+1/2} = u_j^{n-1/2} - \sigma\left(1 - e^{-i\xi}\right) p^{n}_{j+1/2}$$

$$p^{n+1}_{j+1/2} = \left[\left(1-2\sigma^2\right) + \sigma^2\left(e^{i\xi} + e^{-i\xi}\right)\right] p^{n}_{j+1/2} - \sigma\left(e^{i\xi} - 1\right) u_j^{n-1/2}$$

c'est à dire sous forme matricielle

$$(11) \quad W^{n+3/4}_{j+1/4} = A \cdot W^{n-1/4}_{j+1/4}$$

avec

$$(12) \quad A = \begin{pmatrix} 1-2\sigma^2 + \sigma^2\left(e^{i\xi} + e^{-i\xi}\right) & -\sigma\left(e^{i\xi} - 1\right) \\ -\sigma\left(1 - e^{-i\xi}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

3) Critère de Von Neumann.

- Le critère de stabilité de Von Neumann énonce que pour toute onde, ie pour tout ξ, on ne doit pas avoir amplification de l'onde, c'est à dire que les valeurs propres de la matrice

A sont de <u>module inférieur ou égal à 1.</u>
Nous calculons donc les valeurs propres λ de la matrice A.

- Pour une matrice carrée A de la forme

(13) $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

les valeurs propres λ vérifient l'équation :

(14) $$\det(A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

soit sous forme développée :

$$(ad-bc) - \lambda(a+d) + \lambda^2 = 0$$

qu'on peut aussi écrire

(15) $$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0 .$$

- Il suffit de calculer $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ pour la matrice donnée en (12), puis former l'équation du second degré (15). Or

$$\det A = 1 - 2\sigma^2 + \sigma^2(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) - \sigma^2(e^{i\xi} - 1)(1 - e^{-i\xi})$$

$$= 1 - 2\sigma^2 + \sigma^2(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) - \sigma^2(e^{i\xi} + e^{-i\xi} - 2)$$

$$= 1$$

(16) $$\det A = 1 .$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{tr}\,A = 1 - 2\sigma^2 + \sigma^2\left(e^{i\xi} + e^{-i\xi}\right) + 1$$

$$= 2 - 2\sigma^2 + 2\sigma^2 \cos\xi$$

$$= 2 - 2\sigma^2(1 - \cos\xi) = 2 - 4\sigma^2 \sin^2 \xi/2$$

(17) $$\mathrm{tr}\,A = 2 - 4\sigma^2 \sin^2 \xi/2 \,.$$

- L'équation aux valeurs propres λ s'écrit donc

(18) $$\lambda^2 - 2\left(1 - 2\sigma^2 \sin^2\frac{\xi}{2}\right)\lambda + 1 = 0 \,.$$

Le discriminant réduit Δ' vaut

$$\Delta' = \left(1 - 2\sigma^2 \sin^2\frac{\xi}{2}\right)^2 - 1 = -2\sigma^2 \sin^2\frac{\xi}{2}\left(2 - 2\sigma^2 \sin^2\frac{\xi}{2}\right)$$

(19) $$\Delta' = -4\sigma^2 \sin^2\frac{\xi}{2}\left(1 - \sigma^2 \sin^2\frac{\xi}{2}\right) .$$

Si les racines sont réelles, alors $\Delta' > 0$ et $1 - \sigma^2 \sin^2 \xi/2 < 0$. Leur produit $\lambda_1 \lambda_2$ vaut 1 et leur somme $\lambda_1 + \lambda_2$ vaut $1 - 2\sigma^2 \sin \xi/2 < -1$. Donc l'une au moins de ces racines est de valeur absolue strictement supérieure à 1 et le schéma Haway est instable.

- Le déterminant Δ' est négatif quelque soit ξ réel si et seulement si

(20) $$\sigma^2 \leq 1$$

alors les deux racines λ_1 et λ_2 de l'équation (18) sont complexes conjuguées. Leur produit $\lambda_1\lambda_2$ est égal au carré de leur module :

(21) $$\lambda_1\lambda_2 = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2^2| .$$

Mais le produit vaut 1, donc le module de ces deux valeurs propres est dans ce cas toujours inférieur ou égal à 1.

(22) $$\sigma^2 \leq 1 \Rightarrow |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 .$$

- Le schéma Hawray est stable pour $|\sigma| < 1$. Compte tenu de l'échelle de vitesse choisie lors de l'adimensionnement (voir le chapitre 7), cette condition prend aussi la forme

(23) $$c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 .$$

F, juin 2003 –