le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 5 Opérateurs auto-adjoints

• Rappel sur les matrices symétriques

Dans toute cette leçon, on note $(x, y) \equiv \sum_{j=1}^n x_j y_j$ le produit scalaire canonique de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$. On se donne une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à n lignes et n colonnes. On note A^{t} sa transposée.

On a l'identité $(Ax, y) = (x, A^{\mathrm{t}} y)$ pour tout couple de vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

• Un résultat préliminaire

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'équivalence entre $\big(M = 0\big)$ et $\big(\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ (x, My) = 0\big)$.

• Un critère pour qu'une matrice soit symétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle à n lignes et n colonnes. On a l'équivalence entre les propriétés $\big(A = A^{\mathrm{t}}\big)$ et $\big(\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ (Ax, y) = (x, Ay)\big)$.

Si A est une matrice réelle carrée symétrique ($A = A^{\mathrm{t}}$), on dit que l'opérateur de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice A est auto-adjoint.

• Matrices symétriques deux par deux

On se donne $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle et on suppose de plus $b \neq 0$. Alors cette matrice admet deux valeurs propres réelles λ_+ et λ_- ; ce sont les racines réelles et distinctes de l'équation du second degré $\lambda^2 - (a+c)\,\lambda + (a\,c - b^2) = 0$.

On a $\lambda_+ + \lambda_- = a + c = \mathrm{tr} A$, la trace de la matrice A. De plus, $\lambda_+\,\lambda_- = a\,c - b^2 = \det A$.

Un vecteur propre r_+ tel que $A\,r_+ = \lambda_+\, r_+$ peut s'écrire $r_+ = (b,\, \lambda_+ - a)$. De même, le second vecteur propre r_- qui satisfait à $A\,r_- = \lambda_-\, r_-$ est proportionnel à $r_- = (b,\, \lambda_- - a)$.

Les deux vecteurs propres r_+ et r_- sont orthogonaux : $(r_+, r_-) = 0$. Une fois normés, on en déduit la propriété suivante : la matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet une base orthonormée de vecteurs propres.

• Matrices symétriques d'ordre quelconque

La proposition établie au point précédent se généralise aux matrices symétriques réelles d'ordre arbitraire $n \geq 2$: toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Si on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, (c'est à dire telle que $A = A^{\mathrm{t}}$), alors elle admet une base orthonormée de vecteurs propres et les valeurs propres associées sont réelles : il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et des vecteurs $r_1, \ldots, r_n$ de l'espace $\mathbb{R}^n$ tels que $(r_i, r_j) = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et de plus $A\,r_j = \lambda_j\, r_j$ pour tout entier j entre 1 et n.

La preuve de ce magnifique résultat est loin d'être simple. On montre d'abord qu'il existe au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ associée à un vecteur propre $r \in \mathbb{R}^n$ de norme unité : $A\,r = \lambda\, r$

et $\| r \| = 1$. C'est un résultat qui relève du cours d'analyse mathématique pour l'ingénieur ; c'est une conséquence de la compacité de la sphère unité $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| = 1\}$.
On montre ensuite la propriété par récurrence sur l'entier n. D'une part, la propriété est vraie pour $n = 2$ puisqu'elle a été établie dans un paragraphe précédent. D'autre part, si on la suppose vraie pour toute matrice M symétrique d'ordre $(n-1)$, on peut établir qu'elle est encore vraie pour une matrice symétrique A d'ordre n.
On commence par considérer un premier vecteur propre r_1 associé à la valeur propre λ_1 : $A\,r_1 = \lambda_1\,r_1$. On remarque ensuite que l'orthogonal $r_1^\perp$ de r_1 (qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $(n-1)$), est stable par A : Si $(y, r_1) = 0$, il en est de même de son image Ay : $(Ay, r_1) = 0$. Alors la matrice M de la restriction dans le sous espace $r_1^\perp$ écrite avec une base orthonormée de ce sous-espace est symétrique. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une base orthonormée de vecteurs propres qui permet de compléter le vecteur r_1 en une base orthonormée de vecteurs propres de A. Le résultat est alors démontré.

- Matrices orthogonales

Une matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle conserve le produit scalaire :
pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(Rx, Ry) = (x, y)$.
Par exemple, pour $n = 2$ les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

- L'inverse d'une matrice orthogonale est égal à sa transposée

La matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $R\,R^{\mathrm{t}} = R^{\mathrm{t}}\,R = \mathrm{I}_n$. Une matrice orthogonale est inversible. De plus, la relation précédente exprime exactement le fait que l'inverse de la matrice R est égal à la transposée de R : $R^{-1} = R^{\mathrm{t}}$.

- Action d'une matrice orthogonale sur une base orthonormée

Une matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle transforme une base orthonormée arbitraire en une autre base orthonormée.

- Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale

L'ensemble $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est stable par multiplication et l'inverse d'une matrice orthogonale est encore une matrice orthogonale. Muni de la loi de multiplication des matrices, $(\mathrm{O}(n, \mathbb{R}), .)$ est un groupe non commutatif.

- Ecriture d'une forme quadratique comme somme de carrés

Soit Q une matrice symétrique d'ordre $n \geq 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note X le vecteur colonne de ses composantes. On pose $q(x) = X^{\mathrm{t}}\,Q\,X$. Alors la diagonalisation de la matrice Q dans une base orthonormée permet d'écrire la forme quadratique q comme somme de carrés.
Si $\Lambda = R^{-1}\,Q\,R$ avec $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $q(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j\,(R^{\mathrm{t}}X)_j$ car la matrice R satisfait à la relation $R^{-1} = R^{\mathrm{t}}$.

- Méthode de la puissance

Le calcul approché des valeurs propres et des vecteurs propres des matrices carrées de grande taille n'est pas un problème simple. En effet, calculer une valeur propre revient à résoudre une équation polynômiale. Or on sait depuis Niels Abel au début du 19e siècle que pour tout entier

n supérieur ou égal à 5, il n'existe pas de formule générale exprimant les racines d'un polynôme quelconque de degré n avec des formules comportant des radicaux.
La méthode de la puissance permet d'approcher la plus grande valeur propre de manière efficace. On se donne une matrice symétrique A d'ordre n. On part d'un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire. On calcule Ax_0 et on le normalise ; donc $x_1 = \frac{1}{||Ax_0||} Ax_0$ est un vecteur normé. On recommence l'itération avec x_1 : $x_2 = \frac{1}{||Ax_1||} Ax_1$. Et de proche en proche, $x_{k+1} = \frac{1}{||Ax_k||} Ax_k$.
Si la valeur propre λ de A de plus grand module est simple, notons r un vecteur propre associé : $Ar = \lambda\, r$. Si de plus le produit scalaire (x_0, r) est non nul, la suite x_k introduite ci-dessus est toujours définie. Elle converge vers le vecteur r (ou son opposé) et le produit scalaire (x_k, Ax_k) converge vers λ si k tend vers l'infini.

Exercices

- Étude d'une matrice symétrique et de la forme quadratique associée

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = \det(A - \lambda\, \mathrm{I}_3)$.

b) Montrer que la matrice A a une valeur propre simple et une valeur propre double ; on précisera la valeur de ces deux valeurs propres.

c) Si on trnsforme la matrice A sous la forme d'une matrice diagonale Λ, proposer une valeur possible de Λ.

d) Proposer une famille de vecteurs propres pour la matrice A qui soit aussi une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

On écrit un vecteur quelconque $x \in \mathbb{R}^3$ à l'aide de la matrice colonne $X = x^{\mathrm{t}}$. On introduit la forme quadratique $q(x) = X^{\mathrm{t}}\, A\, X$.

e) À l'aide des questions précédentes, écrire $q(x)$ sous forme d'une somme de trois carrés.

f) À l'aide de la méthode de Gauss, reprendre la question précédente.

g) Qu'y a-t-il de commun entre les résultats trouvés aux questions e) et f) ?

- Étude d'une matrice symétrique et de la forme quadratique associée

Reprendre toutes les questions de l'exercice précédent avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Matrices orthogonales deux par deux

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

a) Montrer que les matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont orthogonales.

b) Quelle est la valeur des déterminants des matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$?

c) Dans quels cas la matrice $R(\theta)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

d) Montrer que la matrice $S(\theta)$ est toujours diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

e) Préciser les vecteurs propres de la matrice $S(\theta)$.

f) Montrer que si une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R(\theta)$ ou $A = S(\theta)$.

• Matrice de variance-covariance pour deux variables

On se donne un entier $n \geq 2$. Pour tout vecteur $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n$, on introduit sa moyenne $\overline{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j$. On a alors $\overline{\varphi} \in \mathbb{R}$. On introduit aussi un vecteur constant $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Enfin pour tout couple de vecteurs φ et ψ de $\mathbb{R}^n$ on pose $(\varphi, \psi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \, \psi_j$.

a) Montrer que $\overline{\varphi} = (\varphi, u)$.

b) Rappeler pourquoi l'application qui au couple $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associe le nombre (φ, ψ) définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On définit la variance σ_φ du vecteur φ par la relation $\sigma_\varphi = (\varphi - \overline{\varphi}\, u, \varphi - \overline{\varphi}\, u)$.

c) Montrer que $\sigma_\varphi \geq 0$.

d) Montrer que $\sigma_\varphi = (\varphi, \varphi) - \overline{\varphi}^2$.

e) Montrer que si $\sigma_\varphi = 0$, alors le vecteur φ est constant.

On définit la covariance $\sigma_{\varphi\psi}$ des deux vecteurs φ et ψ par la relation $\sigma_{\varphi\psi} = (\varphi - \overline{\varphi}\, u, \psi - \overline{\psi}\, u)$.

f) Montrer que $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_\varphi$.

g) Montrer que $\sigma_{\varphi\psi}^2 \leq \sigma_\varphi \, \sigma_\psi$.

h) Que se passe-t-il si on a l'égalité $\sigma_{\varphi\psi}^2 = \sigma_\varphi \, \sigma_\psi$?

On se donne maintenant deux vecteurs de nombres réels $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose $\sigma_x > 0$. On forme la matrice de variance-covariance K des deux vecteurs x et y: $K = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$. On observe que c'est une matrice symétrique.

i) Montrer que c'est une matrice positive : si $V = (\alpha, \beta)^{\mathrm{t}}$ est un vecteur colonne à deux composantes, la forme quadratique $q(V) = V^{\mathrm{t}} \, K \, V$ est toujours positive.

j) Montrer que si $q(V) = 0$, alors le vecteur y est une fonction affine du vecteur x: il existe deux nombres réels a et b de sorte que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $y_j = a\, x_j + b$. Dans ce cas, les deux vecteurs x et y sont dits parfaitement corrélés.