le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 9 Normale, courbure, torsion

- Rappels sur l'abscisse curviligne

On rappelle qu'une courbe de l'espace $\mathbb{R}^3$ est paramétrée par trois fonctions régulières $[a, b] \ni t \longmapsto M(t) = (X(t), Y(t), Z(t)) \in \mathbb{R}^3$. La longueur $s(t)$ de l'arc de courbe entre les points $M(a)$ et $M(t)$ est donnée par $s(t) = \int_a^t \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \| \, \mathrm{d}\theta$. En conséquence, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \|$. Le vecteur tangent $\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}$ est de norme unité. Le paramètre s s'appelle l'abscisse curviligne : c'est la longueur le long de la courbe.

- Dérivée du vecteur tangent

En dérivant par rapport à l'abscisse curviligne la relation $\| \tau(s) \|^2 \equiv (\tau(s), \tau(s)) = 1$, on se rend compte que la dérivée $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ du vecteur tangent lui est orthogonale : $(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, \tau(s)) = 0$.

- Vecteur normal à la courbe

À deux dimensions d'espace, le vecteur unitaire τ est complété par un vecteur unitaire n de façon que la famille (τ, n) soit une base orthonormée directe de l'espace euclidien orienté.
Dans le cas de trois dimensions spatiales, on suppose dans le cadre de cette leçon que la courbe est régulière, c'est à dire que le vecteur dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}s^2}$ est différent du vecteur nul. On définit alors le vecteur normal comme le vecteur unitaire qui sous-tend $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$: $n = \frac{1}{\| \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \|} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$.

- Courbure

À deux dimensions d'espace, pour un point courant, on définit la courbure ρ par la relation $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho \, n$. Le nombre ρ est la composante du vecteur $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ le long du vecteur unitaire n. On remarque que la courbure peut être négative si la normale est mal orientée relativement à la courbe.
Pour trois dimensions spatiales, la relation $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho \, n$ définit toujours la courbure ρ qui est égale à la norme $\| \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \|$, donc est positive.

- Courbure d'une droite, même mal paramétrée

On se donne un vecteur unitaire fixe τ_0, un point A et une fonction scalaire $\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t) \in \mathbb{R}$.
Le point courant sur la droite passant par le point A et de vecteur directeur τ_0 s'écrit $M(t) = A + f(t) \, \tau_0$. Donc le vecteur tangent $\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}$ est identiquement égal à τ_0, sa dérivée $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ est nulle et $\rho = 0$.

- Courbure d'un cercle

On se donne le cercle de centre A et de rayon $R > 0$. On peut le paramétrer par $M(\theta) = A + R \, e_r(\theta)$, avec $e_r(\theta) = \cos\theta \, e_1 + \sin\theta \, e_2$. Alors $s = R\,\theta$, $\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = e_\theta$.
On en déduit $n = -e_r(\theta)$ afin que la base (τ, n) soit orthonormée directe. De plus, $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{R}(-e_r) = \frac{1}{R} n$. On en déduit la relation $\rho = \frac{1}{R}$; la courbure d'un cercle est égale à l'inverse de son rayon.

François Dubois, novembre 2019.

- Rayon de courbure

L'exemple du cercle nous conduit à définir le rayon de courbure d'une courbe quelconque assez régulière par la relation $R(s) = \frac{1}{\rho(s)}$. On note que le rayon de courbure varie *a priori* avec le point $M(s)$,

- Centre de courbure

Dans le cas d'un cercle, le centre de courbure est simplement le centre du cercle. Pour une courbe quelconque assez régulière, il est issu du point courant *via* une distance égale au rayon de courbure et dans la direction de la normale. On a $C(s) = M(s) + \frac{1}{\rho(s)}\, n(s)$.
Le cercle centré au centre de courbure et de rayon égal au rayon de courbure $R(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ est appelé cercle osculateur à la courbe au point $M(s)$. Parmi tous les cercles du plan affine passant par $M(s)$ et de vecteurs directeurs $\tau(s)$ et $n(s)$, c'est "le plus proche" de la courbe. En effet, si on paramètre un point du cercle $N(s)$ par l'abscisse curviligne s de la courbe initiale, on a le développement de Taylor suivant : $N(s) - M(s) = \mathrm{O}(s^3)$: l'écart entre la courbe et le cercle osculateur est du troisième ordre ! Le cercle osculateur constitue une excellente approximation locale plane de la courbe étudiée.

- Développée

L'ensemble des centres de courbures lorsque le point $M(s)$ varie sur la courbe définit une nouvelle courbe, la développée de la courbe initiale. Cette courbe développée admet une tangente qui est dans la direction normale à la courbe initiale : $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(\frac{1}{\rho(s)}\big)\, n(s)$.

- Courbure d'une courbe représentative du graphe d'une fonction

On représente dans un repère orthonormé direct le graphe $y = f(x)$ d'une fonction f assez régulière. Le point courant $M(x)$ a donc comme coordonnées $(x, f(x))$. Le vecteur tangent τ a donc comme composantes $\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\,(1, f'(x))$. À deux dimensions spatiales, le vecteur normal $n(x)$ est issu de τ dans une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, donc $n(x)$ a pour composantes $\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\,(-f'(x)), 1)$.
De la relation $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho\, n$, on tire $\rho = (\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, n)$. Finalement, $\rho = f''(x)/(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}$.

- Courbure d'une courbe en coordonnées polaires

Dans le cas d'une courbe de la forme $M = O + R(\theta)\, e_r(\theta)$, avec une fonction régulière $\theta \longmapsto R(\theta)$, on établit que la courbure $\rho(\theta)$ est donnée par l'expression
$\rho(\theta) = \big(R(\theta)^2 + 2\,(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta})^2 - R(\theta)\,\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\theta^2}\big)/\big(R(\theta)^2 + (\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta})^2\big)^{\frac{3}{2}}$.

- Courbure d'une hélice circulaire dans l'espace de dimension trois

On rappelle qu'une hélice circulaire est décrite dans un repère orthonormé direct par la représentation paramétrique $M = O + R e_r(\theta) + a\,\theta\, e_3$, avec $e_r(\theta) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$. On a alors $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = R e_\theta(\theta) + a\, e_3$ et $\big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\big)^2 = R^2 + a^2$. Le vecteur tangent τ a donc l'expression suivante $\tau(\theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\, e_\theta(\theta) + \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\, e_3$. On dérive une nouvelle fois : $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\theta^2}\,\tau + \big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\big)^2\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta}$ et $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\theta^2}\,\tau + \rho\,(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta})^2 n$. Donc $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \rho\,(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta})^3\,(\tau \times n)$. Le vecteur $b \equiv \tau \times n$ est de norme unité. Donc il suffit d'expliciter le produit vectoriel $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2}$ qui vaut dans le cas de l'hélice circulaire $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = R\,(-a\, e_\theta + R k)$. D'où $\rho = \frac{R}{R^2+a^2}$.

• Trièdre de Serret-Frenet (Joseph Serret, 1819–1885, Jean Frédéric Frenet, 1816–1900)
Pour une courbe de l'espace euclidien de dimension trois, on complète le vecteur tangent unitaire τ et le vecteur normal unitaire n défini par la relation $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho\, n$ par leur produit vectoriel $b = \tau \times n$. Alors la base orthonormée directe (τ, n, b) définit au point $M(s)$ un repère orthonormé direct local appelé repère de Serret-Frenet.

• Torsion
Les produits scalaires des trois vecteurs du repère de Serret-Frenet sont constants. Comme pour le vecteur tangent, on obtient quand on les dérive des relations d'orthogonalité :
$(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}, n) = (\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}, b) = 0$ et $(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}, \tau) + (\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, n) = 0$. En particulier, le vecteur $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}$ se décompose sur les seuls vecteurs τ et b et on a $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} = -\rho\,\tau + \theta\, b$. Cette relation définit la torsion $\theta(s)$.
Pour l'hélice circulaire de l'espace tridimensionnel, on a $\theta = \frac{a}{R^2+a^2}$.
Le vecteur dérivé du trière de Serret-Frenet fait apparaître une matrice antisymétrique :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\tau\\ n\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \rho & 0\\ -\rho & 0 & \theta\\ 0 & -\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ n\\ b\end{pmatrix}.$$

Exercices

• Cycloïde
On se donne $R > 0$. La cycloïde est la courbe obtenue quand on suit au cours de son mouvement une roue de rayon R qui roule sans glisser sur un plan. Sa représentation paramétrique dans un repère orthonormé (O, e_1, e_2) s'écrit : $x = X(\theta) = R(\theta - \sin\theta)$, $y = Y(\theta) = R(1 - \cos\theta)$.
a) Montrer que si on change θ en $\theta + 2\pi$, la cycloïde subit une translation que l'on précisera.
b) Que se passe-t-il pour les fonctions X et Y si on change θ en $-\theta$? En déduire que la cycloïde admet un axe de symétrie que l'on précisera.
c) Quel est la valeur du vecteur dérivée $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\theta} e_1 + \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\theta} e_2$?
d) Montrer que pour $\theta = 0$, le vecteur tangent $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}$ est nul.
On dit que le point correspondant de la cycloïde est un point singulier, qui est ici un point de rebroussement.
e) Quelle est la tangente à la cycloïde en ce point ?
f) Etudier les variations des fonctions X et Y pour $\theta \in [0, \pi]$.
g) Dessiner la cycloïde pour $\theta \in [0, 2\pi]$.
h) Montrer que le vecteur $\tau(\theta) = \frac{1}{\|\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}\|}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}$ peut s'exprimer sous la forme
$\tau(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$.
i) En déduire l'expression de la variation de la longueur $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ en fonction du paramètre θ.
j) Quelle est la longueur d'une arche de cycloïde entre les deux points de rebroussements qui correspondent à $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$?
k) Quelle est l'expression du vecteur normal $n(\theta)$?
l) Quelle est la valeur de la courbure $\rho(\theta)$?
m) En déduire les coordonnées du centre du courbure $C(\theta)$ défini par la relation
$C(\theta) = M(\theta) + \frac{1}{\rho(\theta)} n(\theta)$.

n) Quelles sont les coordonnées du point $C^* = C(\pi)$?
o) Montrer que l'on a $C(\theta) = C^* + X(\theta - \pi)\, e_1 + Y(\theta - \pi)\, e_2$.
p) En déduire que la développée de la cycloïde est une autre cycloïde.

• Courbes dans l'espace

On se donne une courbe $t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^3$ assez réguliѐe ; les composantes du point $M(t)$ dans un repère orthonormé direct sont des fonctions trois fois dérivables et la dérivée troisième est supposée continue.
a) Montrer que l'on peut écrire $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\, \tau(t)$ où $s(t)$ désigne l'abscisse curviligne et $\tau(t)$ est un vecteur tangent unitaire.
b) En déduire une décomposition du vecteur $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}$ sur les vecteurs $\tau(t)$ et $n(t)$, avec $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho(s)\, n(s)$.
c) En déduire l'expression de la courbure : $\rho(t) = \frac{\| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2} \|}{(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^3}$.
d) Développer la dérivée troisième $\frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}t^3}$ dans le trièdre de Serret-Frenet composé des trois vecteurs $\tau(t)$, $n(t)$ et $b(t) = \tau(t) \times n(t)$.
e) Que vaut le produit mixte $\big(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}t^3}\big)$ en fonction de la courbure $\rho(t)$, de la variation $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ de l'abscisse curviligne et de la torsion $\theta(t)$?
f) En déduire l'expression $\theta(t) = \frac{(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}t^3})}{\| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2} \|^2}$ de la torsion en fonction du paramètre t.

On étudie la cas particulier de la courbe représentée par $M(t) = (t, t^2, t^3)$ en $t = 0$.
g) Quelles sont les valeurs numériques de la courbure $\rho(0)$ et la torsion $\theta(0)$?