le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 12 Surfaces et intégrales de surface

- Nappe paramétrée

On se donne quatre nombres réels $a<b$, $c<d$ et un espace $\mathbb{R}^2$ des paramètres $(u,\,v)$ de sorte que $a\leq u\leq b$ et $c\leq v\leq d$. On définit la nappe paramétrée Σ de l'espace $\mathbb{R}^3$ par une fonction continûment différentiable Φ du rectangle $\widehat{\Sigma}\equiv[a,\,b]\times[c,\,d]$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette application Φ s'appelle la "carte locale". La nappe paramétrée Σ est définie par la relation
$\Sigma=\Phi(\widehat{\Sigma})$. Un point $M(u,\,v)$ de la nappe paramétrée a des coordonnées x, y et z qui sont des fonctions régulières des paramètres u et v: $x=X(u,\,v)$, $y=Y(u,\,v)$ et $z=Z(u,\,v)$.
L'exemple fondamental est celui d'un parallélogramme plan. L'équation du plan est par exemple de la forme $z=\alpha\,x+\beta\,y+\gamma$. Pour $a\leq u\leq b$ et $c\leq v\leq d$, on pose $x=u$, $y=v$ et $z=\alpha\,u+\beta\,v+\gamma$.
Un second exemple concerne une surface d'équation $z=f(x,\,y)$. Il est analogue au cas précédent sauf que la fonction affine $f(x,\,y)=\alpha\,x+\beta\,y+\gamma$ est remplacée par une fonction f de deux variables arbitraire tout en restant assez régulière.
L'exemple suivant, la sphère centrée à l'origine O et de rayon $R>0$, demande un paramétrage un peu plus élaboré. On utilise les coordonnées sphériques de l'espace tridimensionnel. On projette le point courant M de la sphère sur le plan $x\mathrm{O}y$ en un point m. On a : $z=R\,\cos\theta$ et $\mathrm{O}m=R\,\sin\theta$. Il vient ensuite $x=\mathrm{O}m\,\cos\varphi=R\sin\theta\,\cos\varphi$ et $y=\mathrm{O}m\,\sin\varphi=R\sin\theta\,\sin\varphi$.

- Plan tangent

On suppose la fonction Φ différentiable au point $(u,\,v)$:
$\Phi(u+\delta u,\,v+\delta v)=\Phi(u,\,v)+\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,\,v)\,\delta u+\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,\,v)\,\delta v+\parallel(u,\,v)\parallel\,\varepsilon(\delta u,\,\delta v)$. Les deux vecteurs tangents $\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,\,v)$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,\,v)$ sont deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ et on suppose que la famille $(\frac{\partial\Phi}{\partial u},\,\frac{\partial\Phi}{\partial v})$ est libre. Le plan tangent à la nappe paramétrée Σ au point $M=\Phi(u,\,v)$ est le plan affine qui passe par M avec un plan vectoriel associé qui admet pour base la famille des deux vecteurs $\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,\,v)$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,\,v)$.
Dans le cas d'une surface de la forme $z=f(x,\,y)$, les deux paramètres sont l'abscisse x et l'ordonnée y. On a $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=(1,\,0,\,\frac{\partial f}{\partial x})^{\mathrm{t}}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=(0,\,1,\,\frac{\partial f}{\partial y})^{\mathrm{t}}$. Ils forment toujours une famille libre quelle que soit la fonction f.
Pour une sphère de rayon $R>0$ et centrée à l'origine, on a introduit plus haut les coordonnées sphériques, donc les deux angles polaires θ et φ de sorte que $x=R\,\sin\theta\,\cos\varphi$,
$y=R\,\sin\theta\,\sin\varphi$ et $z=R\,\cos\theta$. Le repère mobile $(e_r,\,e_\theta,\,e_\varphi)$, introduit également à la fin de la leçon numéro huit, est défini par les relations $e_r(\theta,\,\varphi)=\sin\theta\,(\cos\varphi\,e_1+\sin\varphi\,e_2)+\cos\theta\,e_3$, $e_\theta(\theta,\,\varphi)=\cos\theta\,(\cos\varphi\,e_1+\sin\varphi\,e_2)-\sin\theta\,e_3$ et $e_\varphi(\varphi)=-\sin\varphi\,e_1+\cos\varphi\,e_2$. Dans le cas de la sphère de rayon R, on a $\mathrm{d}M=R\,(e_\theta\,\mathrm{d}\theta+e_\varphi\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$; on en déduit $\frac{\partial M}{\partial\theta}=R\,e_\theta$ et
$\frac{\partial M}{\partial\varphi}=R\sin\theta\,e_\varphi$.

François Dubois, janvier 2020.

• Vecteur normal

On suppose que le point $M = \Phi(u, v)$ est un point régulier de la surface, c'est à dire que la famille $(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u, v))$ est libre. Alors le produit vectoriel $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$ est non nul. La norme $\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \|$ de ce produit vectoriel est égale à la surface du parallélogramme construit à l'aide des deux vecteurs tangents $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$. On définit le vecteur normal $n(u, v)$ comme le vecteur unitaire construit à partir de ce produit vectoriel : $n(u, v) = \frac{1}{\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \|} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$. C'est un vecteur orthogonal au plan tangent. D'où la dénomination de "normale" ou de "vecteur normal".

Pour une surface de la forme $z = f(x, y)$, on a $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)^{\mathrm{t}}$ et $n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}} (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)^{\mathrm{t}}$.

Pour la sphère de rayon R, on a la relation $\frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \varphi} = R^2 \sin\theta \, e_r$. On en déduit $\| \frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \varphi} \| = R^2 \sin\theta$ et $n(\theta, \varphi) = e_r(\theta, \varphi)$.

• Surface écaillée

Pour approcher une courbe Γ, on se donne des points sur la courbe et nous avons vu lors de la leçon huit qu'on approche la courbe par la suite des cordes tendues entre un point et son voisin. Par deux points différents, il passe toujours un segment de droite et un seul. On obtient ainsi une approximation continue de la courbe Γ.

Pour approcher une surface, c'est plus délicat. En effet, on se donne un entier $n \geq 1$ et on discrétise d'abord le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ dans l'espace des paramètres avec des petits rectangles de la forme $[a+ih, a+(i+1)h] \times [c+jk, c+(j+1)k]$ où $h = \frac{b-a}{n}$ et $k = \frac{b-a}{n}$. L'image par la carte locale Φ est un quadrangle curviligne dont nous notons les quatre coins par $M_{ij} = \Phi(a+ih, c+jk)$, $M_{i+1,j} = \Phi(a+(i+1)h, c+jk)$, $M_{i+1,j+1} = \Phi(a+(i+1)h, c+(j+1)k)$ et $M_{i,j+1} = \Phi(a+ih, c+(j+1)k)$. Ces quatre points assez proches si n est assez grand appartiennent à la surface Σ mais ne sont pas coplanaires en général.

Nous proposons d'approcher le quadrilatère surfacique $Q_{ij} = \Phi([a+ih, a+(i+1)h] \times [c+jk, c+(j+1)k])$ par un parallélogramme plan $\widetilde{Q_{ij}}$ localisé sur le plan tangent à la surface Σ au point M_{ij}. De façon précise $\widetilde{Q_{ij}}$ est le parallélogramme passant par le point M_{ij} et dirigé par deux vecteurs tangents au point M_{ij}, c'est à dire $h \frac{\partial \Phi}{\partial u}(a+ih, c+jk)$ et $k \frac{\partial \Phi}{\partial v}(a+ih, c+jk)$. On a $\widetilde{Q_{ij}} = M_{ij} + \{\xi \, h \frac{\partial \Phi}{\partial u}(a+ih, c+jk) + \eta \, k \frac{\partial \Phi}{\partial v}(a+ih, c+jk), 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$. La surface $|\widetilde{Q_{ij}}|$ de ce parallélogramme est donnée par la norme du produit vectoriel des deux vecteurs tangents : $|\widetilde{Q_{ij}}| = hk \, \| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(a+ih, c+jk) \|$.

Un tel parallélogramme plan est, pour n assez grand, c'est à dire h et k assez petits, une bonne approximation du parallélogramme surfacique Q_{ij}. Quand on réunit tous ces parallélogrammes plans pour $0 \leq i, j < n$, on obtient une approximation $\Sigma_n = \cup_{0 \leq i, j < n} \widetilde{Q_{ij}}$ assez précise de la surface Σ, mais elle a le défaut d'être discontinue aux interfaces. D'où l'expression de "surface écaillée".

- Surface d'une nappe paramétrée

Nous définissons d'abord la surface $|\Sigma_n|$ de la surface écaillée Σ_n associée au découpage du rectangle $\widehat{\Sigma} = [a, b] \times [c, d]$ des paramètres en $n \times n$ petits rectangles : $|\Sigma_n| = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\widetilde{Q_{ij}}|$.
Compte tenu de la surface d'un morceau d'écaille $\widetilde{Q_{ij}}$, on a
$|\Sigma_n| = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(a+ih, c+jk) \| \, hk$.
On fait ensuite tendre l'entier n vers l'infini. La double somme converge vers l'intégrale double sur le rectangle $\widehat{\Sigma}$ de la fonction $(u, v) \longmapsto \| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(u, v) \|$. On en déduit une expression pour la surface de la nappe paramétrée : $|\Sigma| = \int\int_{\widehat{\Sigma}} \| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(u, v) \| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$. On définit l'élément de surface $\mathrm{d}\sigma$ par la relation $\mathrm{d}\sigma = \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$ et on écrit alors d'une façon faussement simple : $|\Sigma| = \int\int_{\widehat{\Sigma}} \mathrm{d}\sigma$. L'élément de surface $\mathrm{d}\sigma$ ne dépend pas du paramétrage choisi et la relation $|\Sigma| = \int\int_{\widehat{\Sigma}} \mathrm{d}\sigma$ est intrinsèque.
Le terme métrique $\| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}) \|$ est à comparer à la longueur lorsqu'on calcule la longueur d'une courbe Γ : $|\Gamma| = \int_a^b \| (\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(t) \| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{d}s$.
Pour une surface plane, la troisième composante $Z(u, v)$ est nulle et on a dans ce cas particulier $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))^{\mathrm{t}} = (X(u, v), Y(u, v), 0)^{\mathrm{t}}$. La surface Σ est donc une surface plane paramétrée sous la forme $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$. On a alors
$\| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(u, v) \| = \left| \det \begin{pmatrix} \partial X/\partial u & \partial X/\partial v \\ \partial Y/\partial u & \partial Y/\partial v \end{pmatrix} \right|$, valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne. On retrouve la formule de changement de variable dans une intégrale double.
Pour une sphère Σ de rayon R, nous avons vu que $n = e_r$ et $\frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \varphi} = R^2 \sin\theta \, e_r$. On peut donc écrire l'élément de surface $\mathrm{d}\sigma = \| \frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \varphi} \| \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = R^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$. On a donc pour la sphère Σ telle que $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|\Sigma| = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, R^2 \sin\theta = 4\pi R^2$.

- Intégrale de surface

Une fonction f définie sur une nappe paramétrée Σ peut aussi s'écrire sous la forme d'une fonction des paramètres u et v: $\widehat{f}(u, v) = f(\Phi(u, v))$. Pour $n \geq 1$ on introduit la surface écaillée Σ_n associée à une discrétisation $M_{ij} = \Phi(a+ih, c+jk)$ de $\widehat{\Sigma} = [a, b] \times [c, d]$. On peut approcher la fonction f sur Σ_n par la fonction étagée égale à la constante $f(M_{ij})$ sur chaque parallélogramme $\widetilde{Q_{ij}}$. Compte tenu de la valeur $\| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(a+ih, c+jk) \|$ de la surface de ce parallélogramme, on définit l'intégrale approchée I_n de la fonction f sur la surface Σ par $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(M_{ij}) \, \| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(a+ih, c+jk) \| \, hk$. Si n tend vers l'infini et si la fonction f est disons continue pour fixer les idées, la suite I_n converge vers l'intégrale double $I = \int\int_{\widehat{\Sigma}} f(\Phi(u, v)) \, \| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(u, v) \| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$. On définit donc l'intégrale de surface $\int_{\Sigma} f(M) \mathrm{d}\sigma$ par la relation $\int_{\Sigma} f(M) \mathrm{d}\sigma = \int\int_{\widehat{\Sigma}} f(\Phi(u, v)) \, \| (\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(u, v) \| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$. Elle ne dépend pas du paramétrage choisi.
Dans le cas où $f(M) \equiv 1$, on retrouve bien la valeur $|\Sigma|$ pour l'aire de la surface Σ: $\int_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma = |\Sigma|$.

- Flux d'un champ de vecteurs

On se donne un champ de vecteurs φ: $E_3 \longmapsto E_3$ continu pour fixer les idées. Si $f(M) = (\Phi, n)$, produit scalaire du champ φ contre le vecteur normal à la surface Σ, l'intégrale de surface correspondante définit le flux Φ du champ de vecteur φ sur la surface Σ: $\Phi = \int_{\Sigma} (\Phi, n) \mathrm{d}\sigma$.

Exercices

- Surface d'un tronc de cône

On se donne un tronc de cône de base circulaire, de rayon $R>0$ et de hauteur $h>0$.

a) Montrer que le demi-angle au sommet θ satisfait à la relation $\tan\theta = \frac{R}{h}$.

b) Montrer que ce tronc de cône peut être paramétré sous la forme $x = R\cos\varphi\,(1-\frac{z}{h})$, $y = R\sin\varphi\,(1-\frac{z}{h})$ et $z=z$, avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $0 \leq z \leq h$.

c) Calculer les composantes des vecteurs $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial M}{\partial z}$.

d) En déduire l'expression de l'élément de surface $\mathrm{d}\sigma$ en fonction des paramètres géométriques, R et h, des coordonnées φ et z le long de la surface cônique et du produit $\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$.

e) Montrer que la surface S de ce tronc de cône est égale à $\pi R\sqrt{R^2+h^2}$.

- Une intégrale sur une demi-sphère

On note Σ la demi-sphère de rayon $R>0$ centrée sur l'origine et définie par l'inégalité $z \geq 0$.

a) Proposer un paramétrage de cette demi-sphère à l'aide des coordonnées sphériques r, θ et φ: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ et $z = r\cos\theta$. On précisera en particulier les intervalles de variation des angles θ et φ.

b) Calculer l'élément de surface $\mathrm{d}\sigma$ en foncton des paramètres du problème.

c) Calculer l'intégrale $I = \int_\Sigma z\,\mathrm{d}\sigma$.

d) Reprendre les questions a), b) et c) de cet exercice en remplaçant d'une part Σ par la demi-sphère $\widetilde{\Sigma}$ de rayon $R>0$, centrée sur l'origine et définie par l'inégalité $x \geq 0$ et d'autre part l'intégrale I par $J = \int_{\widetilde{\Sigma}} x\,\mathrm{d}\sigma$.

e) Pourquoi les résultats des questions c) et d) sont-ils reliés de façon simple ?

- Aire d'une portion de paraboloïde

On se donne le morceau de paraboloïde P défini par l'équation $z = x^2+y^2$ et la condition $z \leq 2$.

a) Calculer les trois composantes de chacun des deux vecteurs $\frac{\partial M}{\partial x}$ et $\frac{\partial M}{\partial y}$.

b) En déduire l'expression de l'élément de surface $\mathrm{d}\sigma$ en fonction des des coordonnées x et y le long de la surface et du produit $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

c) Calculer la surface S du morceau de paraboloïde P. On pourra être amené à passer en coordonnées polaires planes dasn le plan $x\mathrm{O}y$: $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$.

- Calcul d'un flux

On se donne comme pour un des exercices précédents la demi-sphère Σde rayon $R>0$ centrée sur l'origine et définie par l'inégalité $z \geq 0$. On note n la normale à cette demi-sphère qui pointe dans une direction telle que $n_z \geq 0$. On se donne aussi le champ de vecteurs $\psi(x,y,z) = (x,y,0)$

a) Calculer le produit scalaire $(\psi.n)$ en tout point de la demi-sphère Σ.

b) Calculer le flux $\Phi = \int_\Sigma (\psi.n)\,\mathrm{d}\sigma$ du champ de vecteur ψ sur la demi-sphère Σ.

- Surface d'un tore

Un tore est une surface de révolution qui a la forme d'une bouée. Si l'axe de révolution est l'axe $\mathrm{O}z$ on désigne par r et φ le rayon vecteur et l'angle des coordonnées semi-polaires associées, c'est à dire $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. La coupe du tore dans un plan méridien $\varphi =$ constante est formée de deux petits cercles de rayon R dont le centre est à une distance $a > R$ de l'axe Oz. Si on se restreint au cercle tel que $r > 0$, il est paramétré par un angle $\psi \in [0, 2\pi]$ de sorte que $r = a + R\cos\psi$ et $z = R\sin\psi$.

a) Faire un ou deux dessins qui font apparaître les angles φ et ψ.

b) Expliciter le paramétrage $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$, $z(\varphi, \psi)$ du tore en fonction des variables du problème et des paramètres géométriques R et a.

c) Calculer les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial M}{\partial \psi}$.

d) Montrer que l'élément de surface $\mathrm{d}\sigma$ du tore prend l'expression algébrique suivante : $\mathrm{d}\sigma = R\,(a + R\cos\psi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi$.

e) Montrer que la surface S de ce tore est égale à $4\pi^2 R\,a$.