le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 14 Intégrale triple

- Propriétés fondamentales de l'intégrale triple

On se donne une partie bornée Ω de l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale triple de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ou parfois $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ou même $\int_\Omega f$.

Intégrale triple de la fonction "un"

Si on prend pour domaine Ω le parallélipipède rectangle $]a,\alpha[\times]b,\beta[\times]c,\gamma[$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (avec $a<\alpha$, $b<\beta$ et $c<\gamma$), l'intégrale triple de la fonction $f(x,y,z)\equiv 1$ est égale simplement au volume $(\alpha-a)\,(\beta-b)\,(\gamma-c)$ de ce parallélipipède :
$\int_{]a,\alpha[\times]b,\beta[\times]c,\gamma[}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (\alpha-a)\,(\beta-b)\,(\gamma-c)$. De façon générale, si Ω désigne une partie bornée de l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$ c'est à dire si Ω est inclus dans un parallélipipède rectangle assez grand, l'intégrale triple sur Ω de la fonction $f(x,y,z)\equiv 1$ est égale au volume $|\Omega|$ du domaine : $\int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = |\Omega|$.

Linéarité

On suppose connue l'intégrale triple $\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ de la fonction f et on se donne un nombre λ. Alors $\int_\Omega(\lambda\,f)(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lambda\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Si on se donne aussi l'intégrale triple $\int_\Omega g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ de la fonction g, alors
$\int_\Omega(f+g)(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_\Omega g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Positivité

On suppose la fonction f positive sur Ω: $f(x,y,z)\geq 0$, pour tout $(x,y,z)\in\Omega$. Alors $\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\geq 0$. Si $f\leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x,y,z)\leq g(x,y,z)$ pour tout point (x,y,z) dans Ω, alors $\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leq \int_\Omega g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ [exercice].

Additivité par rapport au domaine

On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i\cap\Omega_j$ est de volume nul si $i\neq j$: $|\Omega_i\cap\Omega_j|=0$. Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i :
$\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω, c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i :
$\forall\, i=1,\ldots,N,\ \exists\,\lambda_i\in\mathbb{R},\ \forall\,(x,y,z)\in\Omega_i,\ f(x,y,z)=\lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^N \lambda_i\,|\Omega_i|$.

François Dubois, janvier 2020.

• Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ et par $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :
$\forall X \in \overline{\Omega},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, Y \in \overline{\Omega},\ |X-Y| < \eta \Longrightarrow |f(X)-f(Y)| < \varepsilon.$ Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.

• Bord

Le bord $\partial\Omega$ du parallélipipède rectangle $\Omega =]a,\, \alpha[\times]b,\, \beta[\times]c,\, \gamma[$ est une réunion de six rectangles : $\partial\Omega = (\{a,\, \alpha\}\times]b,\, \beta[\times]c,\, \gamma[) \cup (]a,\, \alpha[\times\{b,\, \beta\}\times]c,\, \gamma[) \cup (]a,\, \alpha[\times]b,\, \beta[\times\{c,\, \gamma\})$.
Le bord de la boule de rayon R centrée à l'origine est la sphère Σ de centre l'origine et de rayon R: $\partial(\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}) = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = R^2\}$. Si on veut paramétrer cette sphère par une nappe de la forme $(u,\, v) \longmapsto (X(u,\, v), Y(u,\, v), Z(u,\, v))$, on constate que c'est impossible si on veut choisir les fonctions X, Y et Z régulières. Il faut au moins deux nappes : par exemple une première carte $(x,\, y) \longmapsto (\,x,\, y,\, \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,)$ qui paramètre la composante supérieure $\Sigma_+ = \{(x,y,z) \in \Sigma,\, z \geq 0\}$ de la sphère et une seconde carte
$(x,\, y) \longmapsto (\,x,\, y,\, -\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,)$ qui paramètre la composante inférieure
$\Sigma_- = \{(x,y,z) \in \Sigma,\, z \leq 0\}$.
On constate que les deux demi-sphères Σ_+ et Σ_- sont toutes deux des surfaces qui ont un bord. Ce bord est d'ailleurs commun : $\partial\Sigma_+ = \partial\Sigma_- = \{(x,y,0), x^2+y^2 = R^2\}$, le cercle Γ du plan $x\mathrm{O}y$ centré à l'origine et de rayon R.
Cette impossibilité de paramétrer le bord de la boule avec une seule carte locale est essentiellement due à la propriété très générale que le bord $\partial\Omega$ d'un volume Ω de $\mathbb{R}^3$ assez régulier est une surface régulière fermée qui n'a pas de bord. On écrit cette propriété : $\partial(\partial\Omega) = \emptyset$.

• Normale extérieure

On se donne un volume Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Sigma = \partial\Omega$ régulière. Pour un point $x \in \partial\Omega$ du bord, le vecteur normal extérieur $n(x)$, encore appelé normale extérieure, désigne le vecteur unitaire orthogonal au plan tangent à Σ au point x qui pointe vers l'extérieur de Ω.
On rappelle que le plan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ avec $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \neq (0,0,0)$ admet le vecteur de composantes $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ ainsi que son opposé comme vecteurs normaux.
Pour le parallélipipède rectangle à côtés parallèles aux axes $\Omega =]a,\, \alpha[\times]b,\, \beta[\times]c,\, \gamma[$ par exemple, les six faces du bord $\partial\Omega$ sont planes donc la normale est localement constante et prend successivement les six valeurs $\pm e_1$, $\pm e_2$ et $\pm e_3$. Elle est discontinue le long des douze arêtes formées d'intersections deux à deux des rectangles du bord.
La sphère de centre l'origine de rayon $R > 0$ peut être paramétrée par les coordonnées sphériques :
$x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$ et $z = R\cos\theta$. Le vecteur e_r de coordonnées
$(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ est un vecteur normal extérieur à la boule de centre l'origine et de rayon R. Le premier vecteur tangent e_φ a pour coordonnées $(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ et le second e_θ est égal à $e_\varphi \times e_r$ donc a pour coordonnées $(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$.

- Théorème de Fubini

On se donne un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ borné. On se donne une fonction f de Ω dans $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou éventuellement complexes : $\exists\, M \geq 0, \forall\,(x,\,y,\,z) \in \Omega,\, |f(x,\,y,\,z)| \leq M$. Alors l'intégrale de la valeur absolue de f est finie : $\iint_\Omega |f(x,\,y,\,z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < \infty$ et l'intégrale triple de f dans le domaine Ω existe bien. On peut alors toujours intégrer cette fonction de trois variables des deux façons qui suivent.

Intégrale simple d'une famille d'intégrales doubles

On découpe le domaine Ω par des plans horizontaux P_z correspondant à une cote donnée égale à z. On note $\omega(z) \equiv \Omega \cap P_z$. On a donc $\Omega = \cup_{z_{min} \leq z \leq z_{\max}} \omega(z)$. Le théorème de Fubini exprime que $\iiint_\Omega f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \big(\iint_{\omega(z)} f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \big)\,\mathrm{d}z$.

Intégrale double d'une famille d'intégrales simples

On note $\omega(0)$ la surface intersection du domaine Ω avec le plan horizontal P_0. On découpe cette fois Ω par une famille de droites verticales :

$\Omega = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3, (x,\,y) \in \omega(0),\, \varphi_-(x,\,y) \leq z \leq \varphi_+(x,\,y)\}$. Alors

$\iiint_\Omega f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\omega(0)} \big(\int_{\varphi_-(x,y)}^{\varphi_+(x,y)} f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}z \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

On peut avec cette approche calculer de deux façons différentes le volume d'une sphère de rayon R.

- Changement de variable dans une intégrale triple

On suppose qu'avec une application régulière bijective Φ, on peut déformer le volume $\widehat{\Omega}$ pour obtenir le volume Ω: $\widehat{\Omega} \ni (\widehat{x},\,\widehat{y},\,\widehat{z}) \equiv \widehat{X} \longmapsto X \equiv (x,\,y,\,z) = \Phi(\widehat{X}) \in \Omega$. On cherche à calculer l'intégrale triple $I = \iiint_\Omega f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à l'aide d'une intégrale sur le domaine de référence $\widehat{\Omega}$. La solution consiste à former d'abord la matrice jacobienne $J(\widehat{X})$ des dérivées partielles des coordonnées dans Ω relativement aux coordonnées dans $\widehat{\Omega}$: $J(\widehat{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \widehat{y}} & \frac{\partial x}{\partial \widehat{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \widehat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \widehat{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial z}{\partial \widehat{y}} & \frac{\partial z}{\partial \widehat{z}} \end{pmatrix}$.

On a alors $\iiint_\Omega f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\widehat{\Omega}} f(\Phi(\widehat{X}))\,|\det J(\widehat{X})|\,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}\mathrm{d}\widehat{z}$. Lors d'un changement de variables, il faut multiplier l'élément de volume $\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}\mathrm{d}\widehat{z}$ par la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne $|\det J(\widehat{X})|$.

Pour le parallélipipède rectangle $\Omega =]a,\,\alpha[\times]b,\,\beta[\times]c,\,\gamma[$, on peut choisir $\widehat{\Omega} = [0,\,1]^3$ et une fonction Φ affine : $x = a + (\alpha - a)\widehat{x},\ y = b + (\beta - b)\widehat{y},\ z = c + (\gamma - c)\widehat{z}$. Le déterminant jacobien est constant et vaut $|\Omega| = (\alpha - a)\,(\beta - b)\,(\gamma - c)$. On a alors dans ce cas

$\iiint_\Omega f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = |\Omega|\,\iiint_{\widehat{\Omega}} f(\Phi(\widehat{X}))\,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}\mathrm{d}\widehat{z}$.

Pour une boule de centre l'origine et de rayon R, les coordonnées sphériques rappelées plus haut peuvent être utilisées. On doit prendre $0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Même si la transformation associée Φ laisse des singularités à l'origine et sur l'axe vertical, la relation de changement de variable reste encore valable et le déterminant jacobien $\det J(\widehat{X})$ est égal à $r^2 \sin\theta$. Comme $r^2 \geq 0$ et $\sin\theta \geq 0$, ce déterminant est positif et on a finalement

$\iiint_\Omega f(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ f(r\sin\theta\,\cos\varphi,\,r\sin\theta\,\sin\varphi,\,r\cos\theta)$.

Comme le domaine $\widehat{\Omega}$ est le parallélipipède $[0,\,R] \times [0,\,\pi] \times [0,\,2\pi]$, les trois intégrales simples du second membre de la relation précédente se calculent dans l'ordre que l'on veut !

• Intégration par parties

On se donne une partie bornée Ω de l'espace $\mathbb{R}^3$. On suppose que la frontière $\Sigma = \partial\Omega$ est une surface régulière. Pour un point $x \in \partial\Omega$ du bord de Ω, on note $n(x) \equiv (n_1, n_2 n_3)$ le vecteur normal orienté qui pointe vers l'extérieur de Ω. On rappelle que $n(x)$ est un vecteur unitaire. On se donne enfin une application régulière f définie sur l'adhérence $\overline{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$: $f\colon\ \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors le théorème d'intégration par parties exprime que l'intégrale de volume d'une dérivée de la fonction f dans le domaine Ω se réduit à une intégrale surfacique sur le bord $\partial\Omega$ du domaine : $\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} f\, n_j\,\mathrm{d}\sigma$ pour j entier égal à 1, 2 ou 3.
Par exemple, pour calculer un volume, on utilise la relation précédente avec $f = z$ et $j = 3$: $|\Omega| = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} z\, n_z\,\mathrm{d}\sigma$.
Pour une boule de rayon R centrée à l'origine, on a $z = R\cos\theta$, $n_z = \cos\theta$ et $\mathrm{d}\sigma = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Le calcul, laissé au lecteur, conduit alors à la valeur $|\Omega| = \frac{4}{3}\pi R^3$ pour le volume d'une boule de rayon R.

• Intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs

On peut combiner les trois relations d'intégration par parties du paragraphe précédent en introduisant un champ de vecteurs $\Phi\colon\ \overline{\Omega} \ni (x, y, z) \longmapsto \Phi(x, y, z) \equiv (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) \in \mathbb{R}^3$ régulier sur l'adhérence de Ω. La divergence $\mathrm{div}\,\Phi$ du champ de vecteurs Φ est égale à $\frac{\partial\Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial z}$.
On note avec un point le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ $\Phi.n \equiv \Phi_x n_x + \Phi_y n_y + \Phi_z n_z$ le long de la frontière : les trois relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme
$\iiint_\Omega \mathrm{div}\,\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} (\Phi.n)\,\mathrm{d}\sigma$.
On peut retrouver le volume d'une boule de rayon R en utilisant le champ de vecteurs $\Phi(X) = X \equiv (x, y, z)$. On a $\mathrm{div}\,\Phi = 3$ et $\Phi.n = R$ en tout point de la sphère frontière. Alors $3\,|\Omega| = R^2 \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, R = 4\pi R^3$.

Exercices

• Intégration par parties pour le rotationnel

On se donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière régulière. On se donne d'abord deux champs scalaires u et v puis deux champs de vecteurs φ et ψ réguliers définis sur $\overline{\Omega}$.

a) Montrer que $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, n_j(x)\mathrm{d}\sigma$.

b) Si pour $x \in \partial\Omega$, $(\psi, n, \varphi)(x)$ désigne le produit mixte des trois vecteurs $\psi(x)$, $n(x)$ et $\varphi(x)$, montrer que l'on a la relation $\int_\Omega \psi.\,\mathrm{rot}\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{rot}\psi.\,\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\psi, n, \varphi)(x)\,\mathrm{d}\sigma$.

• Introduction aux problèmes elliptiques

On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. On note $\partial\Omega$ sa frontière qu'on suppose régulière et $\overline{\Omega}$ son adhérence composée de la réunion de l'ouvert Ω et de la frontière $\partial\Omega$.
Soit f une fonction donnée de $\overline{\Omega}$ à valeurs réelles. On s'intéresse au problème suivant : chercher une fonction u de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ de sorte que $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ce problème s'appelle le problème de Dirichlet homogène pour l'équation de Poisson. Si v et w sont deux fonctions régulières de l'ouvert Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et n la normale extérieure à $\partial\Omega$, on rappelle que $\frac{\partial v}{\partial n} \equiv \nabla v\,.\,n \equiv \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j}\, n_j$.

a) Montrer que $-\int_\Omega \Delta v \, w \, dx = \int_\Omega \nabla v \, . \, \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} \, w \, d\gamma$.
Soient u et v deux fonctions solutions du problème $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Quel système d'équations vérifie la différence $\varphi \equiv u - v$?
b) En déduire que pour toute fonction w nulle sur le bord de Ω, on a $\int_\Omega \nabla\varphi \, . \, \nabla w \, dx = 0$.
c) En déduire que la fonction φ est identiquement nulle et que le problème de Dirichlet $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ a au plus une solution régulière.

• Exercice de synthèse

On munit l'espace affine euclidien orienté $\mathscr{E}_3$ d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; i,\, j,\, k)$. De plus, on suppose la base $(i,\, j,\, k)$ de l'espace vectoriel associé E_3 orthonormée directe. On se donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(3, 1, 0)$, $(3, 3, 0)$ et $(3, 1, 2)$. On introduit le triangle $T_1 = \mathrm{O}AB$.
a) Calculer la surface $|T_1|$ du triangle T_1.
b) Calculer l'intégrale double $I_1 = \iint_{T_1} x \, dx \, dy$.
Le champ de vecteurs V est défini par les relations
$\mathscr{E}_3 \ni M = \mathrm{O} + x\,i + y\,j + z\,k \longmapsto V(M) = (z - x - 1)\,i + (y + z)\,j + (z - x)\,k \in E_3$.
c) Calculer $\operatorname{div} V$ et $\operatorname{rot} V$.
On introduit le plan affine P d'équation $z = x - y$ que l'on considère comme une surface paramétrée par x et y.
d) Vérifier que les points O, B et C appartiennent au plan P.
e) Quelle est la projection orthogonale du point C sur le plan horizontal $(\mathrm{O}\,; i,\, j)$?
f) Calculer les coordonnées du vecteur normal n au plan P dont la troisième composante est positive ou nulle.
g) On se donne un point courant M du plan P de coordonnées $(x, y, x - y)$. Que vaut le produit scalaire $(n, V(M))$ en fonction de x et y ?
On introduit le triangle $T_2 = \mathrm{O}CB$ et la pyramide Ω de base triangulaire T_1 et de hauteur CA.
h) Vérifier que le triangle T_2 est paramétré par le triangle T_1 *via* l'application
$T_1 \ni M = \mathrm{O} + x\,i + y\,j \longmapsto \Phi(M) = \mathrm{O} + x\,i + y\,j + (x - y)\,k \in T_2$.
i) Montrer que le flux ψ du champ de vecteurs V à travers le triangle T_2 peut s'écrire $\psi = \iint_{T_1} (x + 1) \, dx \, dy$.
j) Calculer $J = \iiint_\Omega \operatorname{div} V \, dx \, dy \, dz$.
k) Montrer que la différence $J - \psi$ peut s'interpréter comme une somme de flux à travers diverses surfaces. On explicitera ces surfaces et les normales associées.