Département de Mathématiques et Statistiques

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, le 13 novembre 2019

Construction d'une réduite de Jordan (d'après Nathalie Zanon)

On se donne la matrice d'ordre 4 suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I_4 la matrice identité à quatre lignes et quatre colonnes.

a) Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = \det\,(A - \lambda\,\mathrm{I}_4)$ de la matrice A.

b) Montrer que -1 est valeur propre de la matrice A et déterminer un vecteur propre R_{-1} correspondant à cette valeur propre. Vérifier votre réponse.

c) Montrer que $+2$ est valeur propre de la matrice A. Proposer une valeur R_2 pour un vecteur propre associé à cette valeur propre. Vérifier votre réponse.

d) Calculer les autres racines du polynôme caractéristique p.

e) Toutes les valeurs propres de la matrice A sont-elles distinctes ?

On note α une valeur propre de A différente de -1 et $+2$.

f) Proposer un vecteur propre R_α de la matrice A correspondant à la valeur propre α. Vérifier votre réponse.

g) La matrice A est-elle diagonalisable ?

h) Calculer un vecteur S_α de $\mathbb{R}^4$ qui satisfait à la condition suivante : $A\,S_\alpha = \alpha\,S_\alpha + R_\alpha$.

i) Montrer que la famille $(R_{-1},\,R_2,\,R_\alpha,\,S_\alpha)$ définit une base de $\mathbb{R}^4$.

j) Quelle est (de préférence sans calcul !) la matrice obtenue à partir de la matrice A si on se place dans la nouvelle base $(R_{-1},\,R_2,\,R_\alpha,\,S_\alpha)$? On dit qu'on a décomposé la matrice A en blocs de Jordan.

François Dubois, 30 octobre 2019.