

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Devoir 3, à rendre pour la séance numéro 10, le 04 décembre 2019

Un système différentiel linéaire d'ordre deux

On se donne deux nombres réels p et q . On cherche à exprimer la solution générale du système différentiel $\frac{dX}{dt} = A X(t)$ avec la condition initiale $X(0) = (p, q)^t$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Quelles sont les valeurs propres de A ?
- Trouver une matrice de passage P inversible et une matrice Λ diagonale de sorte que $A = P \Lambda P^{-1}$.
- Calculer la matrice inverse P^{-1} .
- Montrer qu'avec le changement de vecteur inconnu $Y(t) = P^{-1} X(t)$, le problème posé peut s'écrire $\frac{dY}{dt} = \Lambda Y(t)$ avec la condition initiale $Y(0) = Y_0$, où Y_0 est un vecteur que l'on précisera.
- Calculer en fonction de p , q et de fonctions élémentaires classiques la solution $Y(t)$ du problème posé à la question précédente.
- Calculer la solution $X(t)$ du problème initial : $\frac{dX}{dt} = A X(t)$ avec $X(0) = (p, q)^t$.

François Dubois, 20 novembre 2019.