le cnam

MVA107 - Algèbre Linéaire et Géométrie

Examen première session, 29 janvier 2020

Enseignant responsable :
François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles
et transmises lors des cours,
sous forme papier
et à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours d'Algèbre Linéaire et Géométrie

(MVA107)

Examen du mercredi 29 janvier 2020 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Étude d'une matrice orthogonale

On se donne un espace vectoriel euclidien orienté E_3 de dimension trois et une base orthonormée directe $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ de cet espace. On définit une application linéaire u de E_3 dans lui même par sa matrice U dans la base $(e_1,\, e_2,\, e_3)$: $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice U est une matrice orthogonale.

b) Quelle est la valeur de $\det(U)$?

c) Vérifier que la valeur $\lambda = 1$ est une valeur propre de la matrice U.

d) Calculer les valeurs propres de l'application linéaire u.

e) Proposer une base $(f_1,\, f_2,\, f_3)$ de vecteurs propres de u.

f) Quelle est la matrice V de l'application linéaire u dans la base $(f_1,\, f_2,\, f_3)$?

Exercice 2) Une forme quadratique

Pour $X \equiv (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $Q(X) = 2\,(x\,y + y\,z)$.

a) Vérifier que l'application $\mathbb{R}^3 \ni X \longmapsto Q(X) \in \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

b) Quelle est l'expression algébrique de la forme bilinéaire symétrique $b \,:\, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $b(X,\, X) = Q(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$?

c) Montrer qu'il existe une et une seule matrice symétrique K d'ordre trois que l'on explicitera telle que pour tout X et Y dans $\mathbb{R}^3$, $b(X,\, Y) = X^{\rm t}\, K\, Y$.

d) Quelles sont les valeurs propres de la matrice K ?

e) Expliciter une base $(r_1,\, r_2,\, r_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice K.

f) On décompose un vecteur arbitraire $X \in \mathbb{R}^3$ dans la base des vecteurs propres :
$X = \alpha\, r_1 + \beta\, r_2 + \gamma\, r_3$. Quelle est l'expression de $Q(X)$ en fonction de α, β et γ ?

Exercice 3) Un pétale de lemniscate

On rappelle que dans le plan $\mathbb{R}^2$, tout point $M = (x,\, y)$ différent de l'origine peut s'écrire de façon unique avec des coordonnées polaires ρ et θ de sorte que $(x,\, y) = (\rho \cos\theta,\, \rho \sin\theta)$, avec $\rho > 0$ et un angle polaire θ défini à $2\,\pi$ près. On pose $e_r(\theta) = (\cos\theta,\, \sin\theta)$ et $e_\theta(\theta) = (-\sin\theta,\, \cos\theta)$.

On se donne un nombre réel $a > 0$ et pour $\theta \in [-\frac{\pi}{4},\, \frac{\pi}{4}]$, la courbe Γ d'équation polaire $\rho(\theta) = a\,\sqrt{2}\,\sqrt{\cos(2\,\theta)}$. Un point $M(\theta)$ de la courbe Γ est donc défini par la relation $M(\theta) = \rho(\theta)\, e_r(\theta)$ avec la condition $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

a) Quelles sont les coordonnées cartésiennes des points de Γ correspondant aux valeurs $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6}$, 0, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$ du paramètre θ ?

b) Montrer que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

c) Montrer que $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = -a\,\sqrt{2}\,\frac{\sin(2\,\theta)}{\sqrt{\cos(2\,\theta)}}\, e_r(\theta) + \rho(\theta)\, e_\theta(\theta)$.

d) On introduit l'abscisse curviligne $[-\frac{\pi}{4},\, \frac{\pi}{4}] \ni \theta \longmapsto s(\theta)$ le long de la courbe Γ. Quelle est l'expression de la dérivée $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$?

e) Donner une expression de la longueur L de la courbe Γ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

f) Cette intégrale est-elle convergente ?

g) Dessiner la courbe Γ.

h) Calculer la surface S intérieure à la courbe Γ.

i) Calculer les dérivées $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}(0)$ et $\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\theta^2}(0)$ pour la valeur angulaire $\theta = 0$.

j) Quelle est la courbure de la courbe Γ au point $M(0)$?

Exercice 4) Intégration par parties

On se donne un nombre réel $R > 0$. On note $\mathrm{O} = (0,\, 0,\, 0)$ l'origine de l'espace $\mathbb{R}^3$ formé des points $X \equiv (x,\, y,\, z)$. On considère la demi-sphère Σ définie par les conditions $x^2 + y^2 + z^2 = R > 0$ et $z \geq 0$.

a) Rappeler l'expression des coordonnées cartésiennes $(x,\, y,\, z)$ en fonction des coordonnées sphériques, c'est à dire la distance r à l'origine et les angles polaires θ et φ.

b) Quelles sont les conditions sur ses coordonnées sphériques pour qu'un point $X \in \mathbb{R}^3$ appartienne à la demi-sphère Σ ?

c) Si $X \in \Sigma$, quelles sont les coordonnées cartésiennes du vecteur normal $n(X)$ dont la troisième composante est positive ou nulle, en fonction des coordonnées polaires $(r,\, \theta,\, \varphi)$ du point X ?

d) Montrer que le bord de Σ est un cercle Γ dont on donnera toutes les caractéristiques : centre, rayon et plan dans lequel Γ est inclus.

On définit le champ de vecteurs Φ sur $\mathbb{R}^3$ par la relation $\Phi(X) = (x - y,\, x + y,\, z)$.

e) Calculer la circulation de ce champ de vecteurs le long du cercle Γ.

f) Calculer le flux du rotationnel de Φ sur la surface Σ.

g) Comparer les résultats des questions e) et f). Quel commentaire pouvez-vous faire ?