le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours d'Algèbre Linéaire et Géométrie

(MVA107)

Examen du mercredi 01 juillet 2020 (3 heures)

Cette épreuve se déroule en temps limité, à distance et sans surveillance particulière. Merci de bien respecter la durée de 3 heures. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1) Diagonalisation

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ?

b) Montrer que U est vecteur propre de la matrice A.

c) Quelle est la valeur propre associée ?

d) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

e) En déduire les autres valeurs propres de la matrice A.

f) Proposer une base de $\mathbb{R}^3$ où la matrice A se transforme en une matrice diagonale.

g) Cette base est-elle unique ?

Exercice 2) Une forme quadratique

Pour $X \equiv (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $Q(X) = x^2 + 2\,(x\,y + x\,z)$.

a) Vérifier que l'application $\mathbb{R}^3 \ni X \longmapsto Q(X) \in \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

b) Quelle est l'expression algébrique de la forme bilinéaire symétrique $b \,:\, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $b(X,\, X) = Q(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$?

c) Montrer qu'il existe une et une seule matrice symétrique K d'ordre trois que l'on explicitera telle que pour tout X et Y dans $\mathbb{R}^3$, $b(X,\, Y) = X^{\mathrm{t}}\, K\, Y$.

d) Quelles sont les valeurs propres de la matrice K ?

e) Expliciter une base $(r_1,\, r_2,\, r_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice K.

Exercice 3) Cardioïde

On rappelle que dans le plan $\mathbb{R}^2$, tout point $M = (x,\, y)$ différent de l'origine peut s'écrire de façon unique avec des coordonnées polaires ρ et θ de sorte que $(x,\, y) = (\rho\, \cos\theta,\, \rho\, \sin\theta)$, avec $\rho > 0$ et un angle polaire θ défini à $2\,\pi$ près. On pose $e_r(\theta) = (\cos\theta,\, \sin\theta)$ et $e_\theta(\theta) = (-\sin\theta,\, \cos\theta)$.

On se donne un nombre réel $a > 0$ et pour $\theta \in [-\pi,\, \pi]$, la cardioïde Γ d'équation polaire $\rho(\theta) = a\,(1 - \cos(\theta))$. Un point $M(\theta)$ de la courbe Γ est donc défini par la relation $M(\theta) = \rho(\theta)\, e_r(\theta)$ avec la condition $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

a) Quelles sont les coordonnées cartésiennes des points de Γ correspondant aux valeurs $-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2}$ et π du paramètre θ ?

b) Montrer que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

c) Montrer que $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = a\,\big(\sin\theta\, e_r(\theta) + (1 - \cos\theta)\, e_\theta(\theta)\big)$.

d) On introduit l'abscisse curviligne $[-\pi,\, \pi] \ni \theta \longmapsto s(\theta)$ le long de la courbe Γ. Quelle est l'expression de la dérivée $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$?

e) Donner une expression de la longueur L de la courbe Γ en fonction du paramètre a.

f) Montrer que le vecteur tangent unitaire $\tau \equiv \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}$ admet l'expression suivante : $\tau = \cos(\frac{\theta}{2})\, e_r(\theta) + \sin(\frac{\theta}{2})\, e_\theta(\theta)$.

g) Calculer les composantes du vecteur $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ dans la base orthonormée locale $(e_r(\theta),\, e_\theta(\theta))$.

h) En déduire la courbure de la cardioïde Γ au point $M(\pi)$.

Exercice 4) Intégration par parties

On se donne un nombre réel $R > 0$. On note $\mathrm{O} = (0,\, 0,\, 0)$ l'origine de l'espace $\mathbb{R}^3$ formé des points $X \equiv (x,\, y,\, z)$. On considère la demi-sphère Σ définie par les conditions $x^2 + y^2 + z^2 = R > 0$ et $z \geq 0$.

a) Rappeler l'expression des coordonnées cartésiennes $(x,\, y,\, z)$ en fonction des coordonnées sphériques, c'est à dire la distance r à l'origine et les angles polaires θ et φ.

b) Quelles sont les conditions sur ses coordonnées sphériques pour qu'un point $X \in \mathbb{R}^3$ appartienne à la demi-sphère Σ ?

c) Si $X \in \Sigma$, quelles sont les coordonnées cartésiennes du vecteur normal $n(X)$ dont la troisième composante est positive ou nulle, en fonction des coordonnées polaires $(r,\, \theta,\, \varphi)$ du point X ?

d) Montrer que le bord de Σ est un cercle Γ dont on donnera toutes les caractéristiques : centre, rayon et plan dans lequel Γ est inclus.

On définit le champ de vecteurs Φ sur $\mathbb{R}^3$ par la relation $\Phi(X) = (x + y,\, x - y,\, z)$.

e) Calculer la circulation de ce champ de vecteurs le long du cercle Γ.

f) Calculer le flux du rotationnel de Φ sur la surface Σ.