le cnam

## Algèbre linéaire et géométrie

# Cours 9 Normale, courbure, torsion

- Rappels sur l'abscisse curviligne

On rappelle qu'une courbe de l'espace $\mathbb{R}^3$ est paramétrée par trois fonctions régulières $[a, b] \ni t \longmapsto M(t) = (X(t), Y(t), Z(t)) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que tous les points de la courbe sont réguliers, c'est à dire $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \neq 0$ pour tout instant $t \in [a, b]$. La longueur $s(t)$ de l'arc de courbe entre les points $M(a)$ et $M(t)$ est donnée par $s(t) = \int_a^t \parallel \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \parallel \mathrm{d}\theta$. En conséquence, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \parallel \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \parallel$. Le vecteur tangent $\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}$ est de norme unité. Le paramètre $s$ s'appelle l'abscisse curviligne : c'est la longueur le long de la courbe.

- Dérivée du vecteur tangent

En dérivant par rapport à l'abscisse curviligne la relation $\parallel \tau(s) \parallel^2 \equiv (\tau(s), \tau(s)) = 1$, on se rend compte que la dérivée $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ du vecteur tangent lui est orthogonale : $(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, \tau(s)) = 0$.

- Vecteur normal à la courbe

À deux dimensions d'espace, le vecteur unitaire $\tau$ est complété par un vecteur unitaire $n$ de façon que la famille $(\tau, n)$ soit une base orthonormée directe de l'espace euclidien orienté. En particulier, on a $n_x = -\tau_y$ et $n_y = \tau_x$.
Dans le cas de trois dimensions spatiales, on suppose dans le cadre de cette leçon que la courbe est régulière, c'est à dire que le vecteur dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}s^2}$ est différent du vecteur nul. On définit alors le vecteur normal comme le vecteur unitaire qui sous-tend $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ : $n = \frac{1}{\parallel \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \parallel} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$.

- Courbure

À deux dimensions d'espace, pour un point courant, on définit la courbure $\rho$ par la relation $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho\, n$. Le nombre $\rho$ est la composante du vecteur $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ le long du vecteur unitaire $n$. On remarque que la courbure peut être négative si la normale est mal orientée relativement à la courbe.
Pour trois dimensions spatiales, la relation $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho\, n$ définit toujours la courbure $\rho$ qui est égale à la norme $\parallel \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \parallel$, donc est positive.

- Courbure d'une droite, même mal paramétrée

On se donne un vecteur unitaire fixe $\tau_0$, un point $A$ et une fonction scalaire $\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t) \in \mathbb{R}$. Le point courant sur la droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\tau_0$ s'écrit $M(t) = A + f(t)\, \tau_0$. Donc le vecteur tangent $\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}$ est identiquement égal à $\tau_0$, sa dérivée $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$ est nulle et $\rho = 0$.

François Dubois, avril 2022.

- Courbure d'un cercle

On se donne le cercle de centre $A$ et de rayon $R>0$. On peut le paramétrer par $M(\theta)=A+R\,e_r(\theta)$, avec $e_r(\theta)=\cos\theta\,e_1+\sin\theta\,e_2$. Alors $s=R\,\theta$, $\tau=\frac{dM}{ds}=\frac{d\theta}{ds}\frac{dM}{d\theta}=e_\theta$. On en déduit $n=-e_r(\theta)$ afin que la base $(\tau,n)$ soit orthonormée directe. De plus, $\frac{d\tau}{ds}=\frac{d\theta}{ds}\frac{d\tau}{d\theta}=\frac{1}{R}(-e_r)=\frac{1}{R}n$. On en déduit la relation $\rho=\frac{1}{R}$ ; la courbure d'un cercle est égale à l'inverse de son rayon.

- Rayon de courbure

L'exemple du cercle nous conduit à définir le rayon de courbure d'une courbe quelconque assez régulière par la relation $R(s)=\frac{1}{\rho(s)}$. On note que le rayon de courbure varie *a priori* avec le point $M(s)$,

- Centre de courbure

Dans le cas d'un cercle, le centre de courbure est simplement le centre du cercle. Pour une courbe quelconque assez régulière, il est issu du point courant *via* une distance égale au rayon de courbure et dans la direction de la normale. On a $C(s)=M(s)+\frac{1}{\rho(s)}\,n(s)$.
Le cercle centré au centre de courbure et de rayon égal au rayon de courbure $R(s)=\frac{1}{\rho(s)}$ est appelé cercle osculateur à la courbe au point $M(s)$. Parmi tous les cercles du plan affine passant par $M(s)$ et de vecteurs directeurs $\tau(s)$ et $n(s)$, c'est "le plus proche" de la courbe.
En effet, si on paramètre un point $M(s)$ de la courbe par une abscisse curviligne qu'on suppose nulle au point de référence $M_0$, on a $\big(\frac{dM}{ds}\big)_0=\tau_0$ et $\big(\frac{d^2M}{ds^2}\big)_0=\big(\frac{d\tau}{ds}\big)_0=\rho_0\,n_0$ donc grâce à la formule de Taylor, on a le développement $M(s)=M_0+s\,\tau_0+\frac{1}{2}s^2\rho_0\,n_0+O(s^3)$. Pour un point $N(s)$ sur un cercle de rayon $R_0$ tangent à la courbe, on a le même développement, à ceci près que la courbure vaut maintenant $\frac{1}{R_0}$ : $N(s)=M_0+s\,\tau_0+\frac{1}{2}s^2\frac{n_0}{R_0}+O(s^3)$. On a donc pour la différence : $N(s)-M(s)=\frac{1}{2}s^2\big(\rho_0-\frac{1}{R_0}\big)\,n_0+O(s^3)$. L'écart entre la courbe et un cercle tangent est en général du second ordre. Nous observons toutefois que cet écart est nul pour le cercle osculateur qui satisfait à la condition géométrique $R_0=\frac{1}{\rho_0}$. Dans ce cas, l'écart entre la courbe et le cercle osculateur est du troisième ordre et ce cercle constitue une excellente approximation locale plane de la courbe étudiée. $\square$

- Développée

L'ensemble des centres de courbures lorsque le point $M(s)$ varie sur la courbe définit une nouvelle courbe, la développée de la courbe initiale. Cette courbe développée admet une tangente qui est dans la direction normale à la courbe initiale : $\frac{dC}{ds}=\frac{d}{ds}\big(\frac{1}{\rho(s)}\big)\,n(s)$.

- Courbure d'une courbe représentative du graphe d'une fonction

On représente dans un repère orthonormé direct le graphe $y=f(x)$ d'une fonction $f$ assez régulière. Le point courant $M(x)$ a donc comme coordonnées $(x,f(x))$. Le vecteur tangent $\tau$ a donc comme composantes $\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\,(1,f'(x))$. À deux dimensions spatiales, le vecteur normal $n(x)$ est issu de $\tau$ dans une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, donc $n(x)$ a pour composantes $\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\,(-f'(x)),1)$. De la relation $\frac{d\tau}{ds}=\rho\,n$, on tire $\rho=(\frac{d\tau}{ds},n)$. Finalement, $\rho=f''(x)/(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}$.

• Courbure d'une courbe en coordonnées polaires
Dans le cas d'une courbe de la forme $M = O + R(\theta)\, e_r(\theta)$, avec une fonction régulière $\theta \longmapsto R(\theta)$, on établit que la courbure $\rho(\theta)$ est donnée par l'expression $\rho(\theta) = \big(R(\theta)^2 + 2\,(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta})^2 - R(\theta)\,\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\theta^2}\big) / \big(R(\theta)^2 + (\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta})^2\big)^{\frac{3}{2}}$.

• Courbure d'une hélice circulaire dans l'espace de dimension trois
On rappelle qu'une hélice circulaire est décrite dans un repère orthonormé direct par la représentation paramétrique $M = O + R\, e_r(\theta) + a\,\theta\, e_3$, avec $e_r(\theta) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$. On a alors $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = R\, e_\theta(\theta) + a\, e_3$ et $\big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\big)^2 = R^2 + a^2$. Le vecteur tangent $\tau$ a donc l'expression suivante $\tau(\theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\, e_\theta(\theta) + \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\, e_3$. On dérive une nouvelle fois : $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\theta^2}\,\tau + \big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\big)^2 \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta}$ et $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\theta^2}\,\tau + \rho\,(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta})^2 n$. Donc $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \rho\,(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta})^3\,(\tau \times n)$. Le vecteur $b \equiv \tau \times n$ est de norme unité. Donc il suffit d'expliciter le produit vectoriel $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2}$ qui vaut dans le cas de l'hélice circulaire $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = R\,(-a\, e_\theta + R\, k)$. D'où $\rho = \frac{R}{R^2+a^2}$.

• Trièdre de Serret-Frenet (Joseph Serret, 1819–1885, Jean Frédéric Frenet, 1816–1900)
Pour une courbe de l'espace euclidien de dimension trois, on complète le vecteur tangent unitaire $\tau$ et le vecteur normal unitaire $n$ défini par la relation $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho\, n$ par leur produit vectoriel $b = \tau \times n$. Alors la base orthonormée directe $(\tau, n, b)$ définit au point $M(s)$ un repère orthonormé direct local appelé repère de Serret-Frenet.

• Torsion
Les produits scalaires des trois vecteurs du repère de Serret-Frenet sont constants. Comme pour le vecteur tangent, on obtient quand on les dérive des relations d'orthogonalité :
$(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}, n) = (\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}, b) = 0$ et $(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}, \tau) + (\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, n) = 0$. En particulier, le vecteur $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}$ se décompose sur les seuls vecteurs $\tau$ et $b$ et on a $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} = -\rho\,\tau + \theta\, b$. Cette relation définit la torsion $\theta(s)$. À partir de la relation $(b, n) = 0$, on déduit la relation $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s} = -\theta\, n$. Le vecteur dérivé du trièdre de Serret-Frenet fait apparaître une matrice antisymétrique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\tau\\ n\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \rho & 0\\ -\rho & 0 & \theta\\ 0 & -\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ n\\ b\end{pmatrix}.$$

Pour l'hélice circulaire de l'espace tridimensionnel étidiée plus haut, on a la valeur suivante pour la torsion : $\theta = \frac{a}{R^2+a^2}$.

## Exercices

• Cycloïde
On se donne $R > 0$. La cycloïde est la courbe obtenue quand on suit au cours de son mouvement une roue de rayon $R$ qui roule sans glisser sur un plan. Sa représentation paramétrique dans un repère orthonormé $(O, e_1, e_2)$ s'écrit : $x = X(\theta) = R\,(\theta - \sin\theta)$, $y = Y(\theta) = R\,(1 - \cos\theta)$.

a) Montrer que si on change $\theta$ en $\theta + 2\pi$, la cycloïde subit une translation que l'on précisera.

b) Que se passe-t-il pour les fonctions $X$ et $Y$ si on change $\theta$ en $-\theta$ ? En déduire que la cycloïde admet un axe de symétrie que l'on précisera.

c) Quel est la valeur du vecteur dérivée $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\theta}\, e_1 + \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\theta}\, e_2$ ?

d) Montrer que pour $\theta = 0$, le vecteur tangent $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}$ est nul.

On dit que le point correspondant de la cycloïde est un point singulier, qui est ici un point de rebroussement.

e) Quelle est la tangente à la cycloïde en ce point ?

f) Etudier les variations des fonctions $X$ et $Y$ pour $\theta \in [0, \pi]$.

g) Dessiner la cycloïde pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

h) Montrer que le vecteur $\tau(\theta) = \frac{1}{\|\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}\|} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}$ peut s'exprimer sous la forme $\tau(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$.

i) En déduire l'expression de la variation de la longueur $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ en fonction du paramètre $\theta$.

j) Quelle est la longueur d'une arche de cycloïde entre les deux points de rebroussements qui correspondent à $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ ?

k) Quelle est l'expression du vecteur normal $n(\theta)$ ?

l) Quelle est la valeur de la courbure $\rho(\theta)$ ?

m) En déduire les coordonnées du centre du courbure $C(\theta)$ défini par la relation $C(\theta) = M(\theta) + \frac{1}{\rho(\theta)} n(\theta)$.

n) Quelles sont les coordonnées du point $C^* = C(\pi)$ ?

o) Montrer que l'on a $C(\theta) = C^* + X(\theta - \pi) e_1 + Y(\theta - \pi) e_2$.

p) En déduire que la développée de la cycloïde est une autre cycloïde.

- Développée de la parabole

Dans le plan euclidien, on se donne la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2a}$.

a) Donner l'expression du vecteur tangent $\tau$ en fonction de l'abscisse $x$ du point courant $M(x) = \mathrm{O} + x e_1 + \frac{x^2}{2a} e_2$.

b) Donner l'expression du vecteur normal $n(x)$ en fonction de l'abscisse $x$.

c) En déduire l'expression de la courbure $\rho(x)$ pour un point courant $M(x)$ de la parabole.

d) Quelles sont les coordonnées $(X(x), Y(x))$ du centre de courbure $C(x)$ issu d'un point courant $M(x)$ *via* la relation $C(x) = M(x) + \frac{1}{\rho(x)} n(x)$?

e) Montrer qu'il existe une fonction $g$ que l'on précisera de sorte qu'un point $(X(x), Y(x))$ de la développëe peut s'écrire sous la forme $\frac{Y}{a} = g\left(\frac{X}{a}\right)$. $[g(\xi) = 1 + \frac{3}{2}\xi^{2/3}]$

d) Dessiner sur un même graphe la parabole et sa développée.

- Courbes dans l'espace

On se donne une courbe $t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^3$ assez réguliȅre ; les composantes du point $M(t)$ dans un repère orthonormé direct sont des fonctions trois fois dérivables et la dérivée troisième est supposée continue.

a) Montrer que l'on peut écrire $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tau(t)$ où $s(t)$ désigne l'abscisse curviligne et $\tau(t)$ est un vecteur tangent unitaire.

b) En déduire une décomposition du vecteur $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}$ sur les vecteurs $\tau(t)$ et $n(t)$, avec $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \rho(s)\, n(s)$.

c) En déduire l'expression de la courbure : $\rho(t) = \frac{\|\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}\|}{|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|^3}$.

d) Développer la dérivée troisième $\frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}t^3}$ dans le trièdre de Serret-Frenet composé des trois vecteurs $\tau(t)$, $n(t)$ et $b(t) = \tau(t) \times n(t)$.

e) Que vaut le produit mixte $\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}t^3}\right)$ en fonction de la courbure $\rho(t)$, de la variation $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ de l'abscisse curviligne et de la torsion $\theta(t)$ ?

f) En déduire l'expression $\theta(t) = \frac{(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}t^3})}{\|\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}\|^2}$ de la torsion en fonction du paramètre $t$.

On étudie la cas particulier de la courbe représentée par $M(t) = (t, t^2, t^3)$ en $t = 0$.

g) Quelles sont les valeurs numériques de la courbure $\rho(0)$ et la torsion $\theta(0)$ ?

[$\rho(0) = 2$, $\theta(0) = 3$]