le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 11 Intégrale double

• Propriétés fondamentales de l'intégrale double

On se donne une partie bornée Ω du plan $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale double de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ ou parfois $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ ou même $\int_\Omega f$.

$\star$ Intégrale double de la fonction "un". Si on prend pour domaine Ω le rectangle $]a, b[\times]c, d[$ du plan $\mathbb{R}^2$ (avec $a < b$ et $c < d$), l'intégrale double de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est simplement la surface $(b-a)\,(d-c)$ du rectangle : $\int_{]a,b[\times]c,d[} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = (b-a)\,(d-c)$.

De façon générale, si Ω désigne une partie bornée du plan, c'est à dire si Ω est inclus dans un rectangle assez grand, l'intégrale double sur Ω de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est la surface $|\Omega|$ du domaine : $\int_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = |\Omega|$.

$\star$ Linéarité. On suppose connue l'intégrale double $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ de la fonction f et on se donne un nombre λ. Alors $\int_\Omega (\lambda\, f)(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lambda \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Si on se donne aussi l'intégrale double $\int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ de la fonction g, alors

$\int_\Omega (f+g)(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

$\star$ Positivité. On suppose la fonction f positive sur Ω: $f(x, y) \geq 0,\ \forall (x, y) \in \Omega$. Alors $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geq 0$. Si $f \leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$, alors $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ [exercice].

$\star$ Additivité par rapport au domaine. On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de surface nulle si $i \neq j$: $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$. Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i: $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

• Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω, c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i: $\forall i,\ \exists \lambda_i,\ \forall (x, y) \in \Omega_i,\ f(x, y) = \lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \lambda_i\, |\Omega_i|$ [exercice].

• Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et par $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :

$\forall X \in \overline{\Omega},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall Y \in \overline{\Omega},\ |X - Y| < \eta \Longrightarrow |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.

Pour établir ce résultat, on utilise l'uniforme continuité de f et on l'approche par des fonctions étagées. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε étagée sur Ω de sorte que $f_\varepsilon - \varepsilon \leq f \leq f_\varepsilon + \varepsilon$ sur Ω. Alors le nombre $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ satisfait nécessairement aux inégalités

---

François Dubois, mai 2022.

$\int_\Omega f_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \varepsilon\,|\Omega| \,\leq\, \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,\leq\, \int_\Omega f_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \varepsilon\,|\Omega|$.
On montre alors d'une part que le nombre $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est bien défini et d'autre part qu'on peut l'approcher en calculant l'intégrale d'une fonction étagée qui approche la fonction f.

- Théorème de Fubini

On se donne un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ borné (ce qui signifie que Ω peut être inclus dans un rectangle assez grand). On se donne une fonction bornée de Ω dans $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou éventuellement complexes : $\exists M \geq 0, \forall (x,y) \in \Omega, |f(x,y) \leq M$. Alors l'intégrale de la valeur absolue de f est finie : $\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$. De plus, l'intégrale double de f dans le domaine Ω existe bien et on peut toujours intégrer cette fonction de deux variables "dans l'ordre que l'on veut". De façon plus précise, si Ω est compris entre deux courbes de la forme $y = \varphi(x)$ comme à la figure 1, c'est à dire $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x)\}$, on a $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \Big[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y)\Big]$. Si Ω est compris entre deux courbes de la forme $x = \psi(x)$ comme à la figure 2, c'est à dire
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_-(y) \leq x \leq \psi_+(y)\}$, on a
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \Big[\int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} \mathrm{d}x\, f(x,y)\Big]$.
Dans le cas où le domaine Ω peut être paramétré de l'une ou l'autre manière, on calcule l'intégrale double par l'une quelconque des relations précédentes et
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \Big[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y)\Big] = \int_c^d \mathrm{d}y \Big[\int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} \mathrm{d}x\, f(x,y)\Big]$.

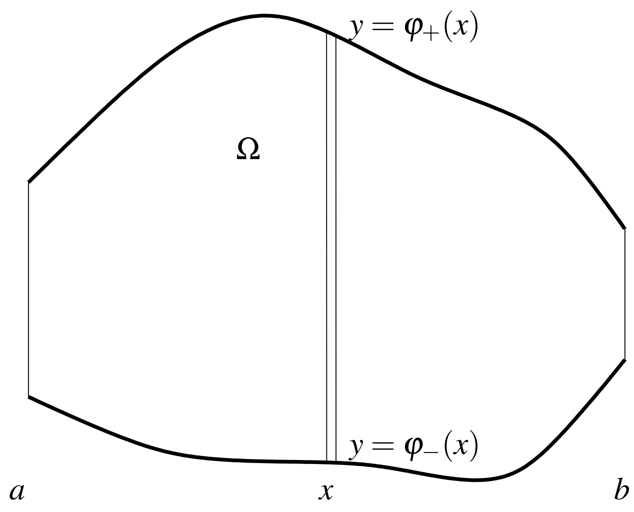

Figure 1. Calcul de l'intégrale double dans le domaine Ω, d'abord par intégration de la fonction f par rapport à y entre $\varphi_-(x)$ et $\varphi_+(x)$, puis par intégration en x entre a et b du résultat obtenu.

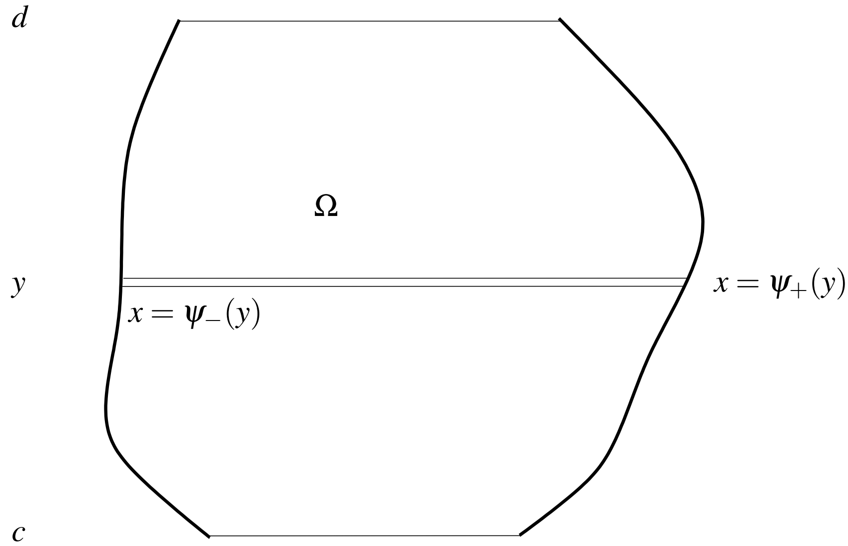

Figure 2. Calcul de l'intégrale double dans le domaine Ω, d'abord par intégration de la fonction f par rapport à x entre $\psi_-(y)$ et $\psi_+(y)$, puis par intégration en y entre c et d du résultat obtenu.

- Un premier exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On peut vérifier la conclusion du théorème de Fubini en considérant la fonction f égale à 1 dans le demi-disque $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ redonnent la surface $|D|$ du demi-disque D, à savoir $\frac{\pi}{2}$.

- Un second exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels a et b strictement positifs et le triangle $T = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. On pose $f(x,\, y) = x - y$. On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction $|f|$ sur le triangle T est finie puisque $|f(x,\, y)| \leq a + b$ si $(x,\, y) \in T$. On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives $\int_0^a \mathrm{d}x \big[\int_0^{b(1-x/a)} \mathrm{d}y\,(x-y) \big]$ et $\int_0^b \mathrm{d}y \big[\int_0^{a(1-y/b)} \mathrm{d}x\,(x-y) \big]$ sont égales et valent $\frac{ab}{6}\,(a-b)$, valeur de l'intégrale double de la fonction f dans le triangle T.

- Changement de variable dans une intégrale double

Comme ci-dessus, on transforme le carré unité $K = [0,\, 1] \times [0,\, 1]$ avec une fonction non linéaire Φ de classe $\mathscr{C}^1$, bijective de K sur $Q = \Phi(K)$ et l'application réciproque est supposée continue de Q sur K. On se donne maintenant une fonction f intégrable au sens de Riemann dans Q et on cherche à écrire l'intégrale $\int_Q f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec une intégrale dans le carré K.
On reprend les notations du paragraphe précédent et on pose $f_{i,j} = f(\Phi(\xi_i,\, \eta_j))$: c'est une approximation de la fonction f dans le (petit) quadrangle curviligne $Q_{i,j}$. On a alors $\int_Q f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{1 \leq i,\, j \leq N} \int_{Q_{i,j}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{1 \leq i,\, j \leq N} \int_{\Phi(K_{i,j})} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Pour chaque quadrangle curviligne $Q_{i,j}$, on a $\int_{\Phi(K_{i,j})} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx f_{i,j} \int_{\Phi(K_{i,j})} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et on a vu au paragraphe précédent que $\int_{\Phi(K_{i,j})} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \int_{P_{i,j}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{K_{i,j}} |\det \mathrm{d}\Phi(\xi_i,\, \eta_j)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$. On en déduit que

$\int_{\Phi(K_{i,j})} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \approx \sum_{1\leq i, j\leq N} \int_{K_{i,j}} f(\Phi(\xi_i, \eta_j))\, |\det \mathrm{d}\Phi(\xi_i, \eta_j)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. Si l'entier N tend vers l'infini, cette dernière somme converge vers l'intégrale
$\int_K f(\Phi(\xi, \eta))\, |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. On en déduit la forme finale de la formule de changement de variable dans une intégrale double :
$\int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K f(\Phi(\xi, \eta))\, |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. Le tout est de ne pas oublier le jacobien $J(\xi, \eta) \equiv |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|$, valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne $\mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)$!
On admet que le résultat précédent se généralise au cas d'un ouvert quelconque K de $\mathbb{R}^n$ pour un entier n quelconque ≥ 1 et une fonction f mesurable sur $Q = \Phi(K)$ et intégrable sur Q, c'est à dire telle que $\int_Q |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$.
A titre d'exercice, le lecteur peut chercher à retrouver la formule "usuelle" d'intégration par parties dans le cas de la dimension un, comme cas particulier de la relation précédente !

- Cordonnées polaires dans le plan

Les variables ξ et η sont notées r et θ et l'application Φ de changement de variable $(r, \theta) \longmapsto (x, y)$ est définie par $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. La matrice jacobienne de cette transformation peut se calculer sans difficulté particulière et on a, si on suppose $r > 0$:
$J(r, \theta) = r$. On a alors $\int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K f(r\cos, r\sin\theta)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$ lorsque $Q = \Phi(K)$.

- Intégration par parties

On se donne deux nombres réels a et b de sorte que $a < b$. On rappelle d'abord que la relation classique $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = fb) - f(a)$ peut s'écrire en introduisant la normale extérieure $n(x)$ aux deux points a et b de la frontière $\partial[a, b]$ de l'intervalle $[a, b]$: $n(a) = -1$ et $n(b) = +1$. Alors $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \sum_{x\in\partial[a,b]} f(x)\, n(x)$.
Dans le cas de deux dimensions, on se donne une partie bornée Ω du plan $\mathbb{R}^2$: elle est incluse dans un rectangle suffisamment grand. On suppose que la frontière, le bord $\partial\Omega$ de Ω est une courbe assez régulière, qu'on note parfois Γ. Par exemple, si Ω est le disque D de centre l'origine et de rayon $R > 0$, son bord ∂D est alors le cercle de centre l'origine et de rayon R.
On note $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ la réunion de Ω et de son bord $\partial\Omega$. On dit que $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de Ω. Pour un point $x \in \partial\Omega$ du bord de Ω, on note $n(x)$ le vecteur normal orienté qui pointe vers l'extérieur de Ω. On rappelle que $n(x)$ est un vecteur unitaire et que le point x est un point quelconque du bord. Dans le cas du disque D, un point du bord peut s'écrire
$x = (x_1, x_2) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ l'angle polaire usuel. Alors le vecteur normal $n(x)$ a des coordonnées très simples dans ce cas : $n(x) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
On se donne enfin une application régulière f définie sur l'adhérence $\overline{\Omega}$: $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors le théorème d'intégration par parties exprime que l'intégrale d'une dérivée de la fonction f dans le domaine Ω se réduit à une intégrale curviligne sur le bord $\partial\Omega$ du domaine :
$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\, n_x\, \mathrm{d}s$ et $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\, n_y\, \mathrm{d}s$. On exprime cette propriété de façon synthétique sous la forme $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\, n_j\, \mathrm{d}s$ pour les deux composantes $(j = 1, 2)$ ou même $\iint_\Omega \partial_j f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\, n_j\, \mathrm{d}s$ avec $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$.

- Intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs

On peut combiner ces deux relations en introduisant un champ de vecteurs $\Phi:\ \overline{\Omega} \ni (x,\, y) \longmapsto \Phi(x,\, y) \equiv (\Phi_x,\, \Phi_y) \in \mathbb{R}^2$ régulier sur l'adhérence de Ω. La divergence du champ de vecteurs Φ est par définition le champ scalaire $\mathrm{div}\,\Phi$ défini par $\mathrm{div}\,\Phi \equiv \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}$. Si on note exceptionnellement avec un point le produit scalaire $\Phi.n \equiv \Phi_x n_x + \Phi_y n_y$ le long de la frontière, les deux relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme $\iint_\Omega \mathrm{div}\,\Phi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (\Phi.n)\, \mathrm{d}s$.

- Formule de Green-Riemann

Une variante d'écriture du résultat précédent consiste à réintroduire le vecteur tangent τ, en choisissant une orientation où il est issu du vecteur normal dans une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. On a alors $\tau_x = -n_y$ et $\tau_y = n_x$. Comme $\tau_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ et $\tau_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, il vient $n_x\, \mathrm{d}s = \mathrm{d}y$ et $n_y\, \mathrm{d}s = -\mathrm{d}x$. Si on note $P \equiv -\Phi_y$ et $Q \equiv \Phi_x$, la relation $\iint_\Omega \mathrm{div}\,\Phi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (\Phi.n)\, \mathrm{d}s$ peut s'écrire aussi $\int_{\partial\Omega} (P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$: c'est la relation de Green-Riemann.

- Calcul d'aires

Comme l'aire $|\Omega|$ d'un ensemble borné Ω du plan $\mathbb{R}^2$ est simplement l'intégrale de la fonction constante égale à 1 puisque $|\Omega| = \iint_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, il suffit de trouver une fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ pour écrire l'aire avec une simple intégrale curviligne : $|\Omega| = \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\, n_x\, \mathrm{d}s$. Si on choisit par exemple (on peut prendre d'autres fonctions !), $f(x,\, y) = x$, il vient $|\Omega| = \int_{\partial\Omega} x\, n_x\, \mathrm{d}s$. Par exemple pour le disque D de centre l'origine et de rayon R, On a $x = R\cos\theta$ sur le bord et $n_x = \cos\theta$. On trouve donc $\int_{\partial\Omega} x\, n_x\, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} R\cos^2\theta\, \mathrm{d}\theta = \pi R^2$ comme on pouvait s'y attendre.

On a bien sûr une relation analogue en remplaçant les dérivées partielles par rapport à la première variable par des dérivées partielles par rapport à la seconde. Si on choisit $f(x,\, y) = y$, on a $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ et $|\Omega| = \iint_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} y\, n_y\, \mathrm{d}s$.

Si on prend la demi-somme entre les deux relations précédntes, on en déduit : $|\Omega| = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x\, \mathrm{d}y - y\, \mathrm{d}x)$. En introduisant les coordonnées polaires planes ρ et θ de sorte que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, il vient après quelques lignes de calcul $|\Omega| = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \rho^2\, \mathrm{d}\theta$. Cette relation permet de calculer l'aide $S(\theta_0)$ sous-tendue par la spirale d'Archimède d'équation polaire $\rho = a\,\theta$ entre les valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \theta_0$: $S(\theta_0) = \frac{a^2}{6}\, \theta_0^3$.

Exercices

- Démonstration de la relation d'intégration par parties dans un cas particulier

On se donne le triangle du plan K défini par les relations $K = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}$. On se donne aussi une fonction régulière $u:\ \overline{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ jusqu'au bord de K.

a) Dessiner le triangle K.

b) Donner les deux composantes du vecteur n qui constitue la normale extérieure le long des trois côtés du bord ∂K du triangle “plein” K.

c) À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'intégrale double $I_x = \iint_K \frac{\partial u}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

d) On note s l'abscisse curviligne le long de la frontière ∂K. Calculer l'intégrale curviligne $J_x = \int_{\partial K} u\, n_x \, \mathrm{d}s$.
e) Constater que $I_x = J_x$: le théorème d'intégration par parties est satisfait dans le triangle K pour la première composante.
f) Reprendre les questions c), d) et e) avec I_x remplacé par $I_y = \iint_K \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ et J_x par $J_x = \int_{\partial K} u\, n_y \, \mathrm{d}s$. On montrera que $I_y = J_y$.

- Changement de variables pour un calcul d'aire

On se donne $a > 1$ et $b > 1$. On définit le domaine Ω du plan $\mathbb{R}^2$ par les trois inégalités $x > 0$, $\frac{1}{a} x < y < a x$ et $\frac{1}{b} < x y < b$.
a) Dessiner le donaine Ω.
b) Montrer que si on introduit de nouvelles variables u et v de sorte que $x = \frac{u}{v}$ et $y = u v$, le domaine Ω est défini par des inégalités simples que l'on précisera.
c) Calculer le déterminant jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$.
d) En déduire que la surface $|\Omega|$ du donaine Ω satisfait à la relation $|\Omega| = \frac{b^2-1}{b} \log a$.

- Une expression de la surface d'un domaine bi-dimensionnel

Soit Ω un sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ qu'on suppose borné et de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. La normale extérieure à Ω est notée $n(x)$ et elle dépend du point $x \in \partial\Omega$ sur la frontière de Ω. On suppose que le vecteur tangent $\tau(x) \equiv (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s})$ est tel que la base $(n(x), \tau(x))$ est un repère local orthonormé direct du plan $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire canonique.
On pose $I = \int_{\partial\Omega} (-y \sin^2 x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) \, \mathrm{d}y)$.
a) Exprimer l'intégrale I à l'aide des deux composantes n_x et n_y de la normale extérieure et de l'abscisse curviligne ds.
b) Mettre en évidence un champ de vecteurs $\Phi \equiv (\Phi_x, \Phi_y)$ défini sur l'ensemble Ω de sorte que $I = \int_{\partial\Omega} (\Phi_x n_x + \Phi_y n_y) \, \mathrm{d}s$.
c) Que vaut $\delta \equiv \mathrm{div}\Phi$?
d) Démontrer que la surface $|\Omega|$ de l'ensemble Ω peut être calculée à l'aide de l'expression $|\Omega| = \int_{\partial\Omega} (-y \sin^2 x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) \, \mathrm{d}y)$.

- Domaines rectangulaires

Soit D le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$.
a) Calculer l'intégrale double $\int_D x y \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.
b) Même question avec l'intégrale $\int \int_D x \sin(x+y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ dans le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

- Calcul d'aire

Soit $a < b$ et h trois nombres réels strictement positifs. On note A et B les points de coordonnées $(0, a)$ et (h, b). On appelle P le parallélogramme bordé par l'axe des abscisses, les droites $x = 0$, $x = h$ et la droite AB.
a) A l'aide d'un calcul intégral classique, rappeler la valeur de l'aire de P.
b) Par un calcul d'intégrale double, retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Fubini et une intégration d'abord selon y puis ensuite selon x.

- Echange de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction f définie pour x et y réels. Ecrire l'expression de l'intégrale double $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\, f(x, y)$ obtenue après échange de l'ordre des intégrales.

- Domaine circulaire

a) Soit D le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Calculer l'intégrale double $I = \iint_D x^3\, y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

b) Même question avec l'intégrale qui s'écrit avec la même expression algébrique mais dans le domaine $D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$: $I_+ = \iint_{D_+} x^3\, y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

- Domaine elliptique

Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux longueurs fixées. On note D l'intersection de l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec le premier quadrant $Q_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

a) Dessiner l'ensemble D.

b) Effectuer un changement de variables non banal pour transformer l'intégrale double $I = \iint_D x\, y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

c) En déduire la surface $|D|$ du quart de domaine elliptique D.

d) Achever le calcul de l'intégrale I.