

Cours 14 Intégrale triple

- Propriétés fondamentales de l'intégrale triple

On se donne une partie bornée Ω de l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale triple de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ ou parfois $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ et souvent plus simplement $\int_{\Omega} f dx dy dz$ ou même $\int_{\Omega} f$.

Intégrale triple de la fonction "un"

Si on prend pour domaine Ω le parallélépipède rectangle $]a, \alpha[\times]b, \beta[\times]c, \gamma[$ de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (avec $a < \alpha$, $b < \beta$ et $c < \gamma$), l'intégrale triple de la fonction $f(x, y, z) \equiv 1$ est égale simplement au volume $(\alpha - a)(\beta - b)(\gamma - c)$ de ce parallélépipède :

$\int_{]a, \alpha[\times]b, \beta[\times]c, \gamma[} dx dy dz = (\alpha - a)(\beta - b)(\gamma - c)$. De façon générale, si Ω désigne une partie bornée de l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 c'est à dire si Ω est inclus dans un parallélépipède rectangle assez grand, l'intégrale triple sur Ω de la fonction $f(x, y, z) \equiv 1$ est égale au volume $|\Omega|$ du domaine : $\int_{\Omega} dx dy dz = |\Omega|$.

Linéarité

On suppose connue l'intégrale triple $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ de la fonction f et on se donne un nombre λ . Alors $\int_{\Omega} (\lambda f)(x, y, z) dx dy dz = \lambda \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$. Si on se donne aussi l'intégrale triple $\int_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz$ de la fonction g , alors

$$\int_{\Omega} (f + g)(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \int_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz.$$

Positivité

On suppose la fonction f positive sur Ω : $f(x, y, z) \geq 0$, pour tout $(x, y, z) \in \Omega$. Alors $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \geq 0$. Si $f \leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ pour tout point (x, y, z) dans Ω , alors $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz$ [exercice].

Additivité par rapport au domaine

On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de volume nul si $i \neq j$: $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$. Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i :

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y, z) dx dy dz.$$

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω , c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i :

$\forall i = 1, \dots, N, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \Omega_i, f(x, y, z) = \lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\Omega_i|$.

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de \mathbb{R}^3 et par $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :

$\forall X \in \overline{\Omega}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall Y \in \overline{\Omega}, |X - Y| < \eta \implies |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.

- Bord

Le bord $\partial\Omega$ du parallépipède rectangle $\Omega =]a, \alpha[\times]b, \beta[\times]c, \gamma[$ est une réunion de six rectangles : $\partial\Omega = (\{a, \alpha\} \times]b, \beta[\times]c, \gamma[) \cup (]a, \alpha[\times \{b, \beta\} \times]c, \gamma[) \cup (]a, \alpha[\times]b, \beta[\times \{c, \gamma\})$.

Le bord de la boule de rayon R centrée à l'origine est la sphère Σ de centre l'origine et de rayon R : $\partial(\{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}) = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Si on veut paramétrer cette sphère par une nappe de la forme $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$, on constate que c'est impossible si on veut choisir les fonctions X, Y et Z régulières. Il faut au moins deux nappes : par exemple une première carte $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)})$ qui paramètre la composante supérieure $\Sigma_+ = \{(x, y, z) \in \Sigma, z \geq 0\}$ de la sphère et une seconde carte

$(x, y) \mapsto (x, y, -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)})$ qui paramètre la composante inférieure $\Sigma_- = \{(x, y, z) \in \Sigma, z \leq 0\}$.

On constate que les deux demi-sphères Σ_+ et Σ_- sont toutes deux des surfaces qui ont un bord. Ce bord est d'ailleurs commun : $\partial\Sigma_+ = \partial\Sigma_- = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = R^2\}$, le cercle Γ du plan xOy centré à l'origine et de rayon R .

Cette impossibilité de paramétrer le bord de la boule avec une seule carte locale est essentiellement due à la propriété très générale que le bord $\partial\Omega$ d'un volume Ω de \mathbb{R}^3 assez régulier est une surface régulière fermée qui n'a pas de bord. On écrit cette propriété : $\partial(\partial\Omega) = \emptyset$.

- Normale extérieure

On se donne un volume Ω de \mathbb{R}^3 de frontière $\Sigma = \partial\Omega$ régulière. Pour un point $x \in \partial\Omega$ du bord, le vecteur normal extérieur $n(x)$, encore appelé normale extérieure, désigne le vecteur unitaire orthogonal au plan tangent à Σ au point x qui pointe vers l'extérieur de Ω .

On rappelle que le plan affine de \mathbb{R}^3 d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ admet le vecteur de composantes $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}(\alpha, \beta, \gamma)$ ainsi que son opposé comme vecteurs normaux.

Pour le parallépipède rectangle à côtés parallèles aux axes $\Omega =]a, \alpha[\times]b, \beta[\times]c, \gamma[$ par exemple, les six faces du bord $\partial\Omega$ sont planes donc la normale est localement constante et prend successivement les six valeurs $\pm e_1, \pm e_2$ et $\pm e_3$. Elle est discontinue le long des douze arêtes formées d'intersections deux à deux des rectangles du bord.

La sphère de centre l'origine de rayon $R > 0$ peut être paramétrée par les coordonnées sphériques : $x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi$ et $z = R \cos \theta$. Le vecteur e_r de coordonnées $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ est un vecteur normal extérieur à la boule de centre l'origine et de rayon R . Le premier vecteur tangent e_φ a pour coordonnées $(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ et le second e_θ est égal à $e_\varphi \times e_r$ donc a pour coordonnées $(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$.

- Théorème de Fubini

On se donne un domaine Ω de \mathbb{R}^3 borné. On se donne une fonction f de Ω dans \mathbb{R} à valeurs réelles ou éventuellement complexes : $\exists M \geq 0, \forall (x, y, z) \in \Omega, |f(x, y, z)| \leq M$. Alors l'intégrale de la valeur absolue de f est finie : $\iint_{\Omega} |f(x, y, z)| dx dy dz < \infty$ et l'intégrale triple de f dans le domaine Ω existe bien. On peut alors toujours intégrer cette fonction de trois variables des deux façons qui suivent.

Intégrale simple d'une famille d'intégrales doubles

On découpe le domaine Ω par des plans horizontaux P_z correspondant à une cote donnée égale à z . On note $\omega(z) \equiv \Omega \cap P_z$. On a donc $\Omega = \cup_{z_{\min} \leq z \leq z_{\max}} \omega(z)$. Le théorème de Fubini exprime que $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (\iint_{\omega(z)} f(x, y, z) dx dy) dz$.

Intégrale double d'une famille d'intégrales simples

On note $\omega(0)$ la surface intersection du domaine Ω avec le plan horizontal P_0 . On découpe cette fois Ω par une famille de droites verticales :

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \omega(0), \varphi_-(x, y) \leq z \leq \varphi_+(x, y)\}$. Alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\omega(0)} \left(\int_{\varphi_-(x, y)}^{\varphi_+(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Si ω est un domaine borné de \mathbb{R}^2 et g une application de ω dans \mathbb{R} positive, on considère le volume Ω défini par les relations $(x, y) \in \omega$ et $0 \leq z \leq g(x, y)$. Alors le volume $|\Omega|$ du domaine Ω est égal à l'intégrale double $\iint_{\omega} g(x, y) dx dy$. En effet, avec les choix $\omega(0) = \omega$, $\varphi_-(x, y) = 0$, $\varphi_+(x, y) = g(x, y)$ et $f(x, y, z) = 1$ dans la relation précédente, on obtient

$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\omega} dx dy \left[\int_0^{g(x, y)} dz \right] = \iint_{\omega} g(x, y) dx dy$. On découvre à cette occasion l'interprétation géométrique de l'intégrale double d'une fonction positive comme étant égale au volume de l'espace euclidien compris entre le plan xOy et la surface d'équation $z = g(x, y)$.

On peut avec cette approche calculer de deux façons différentes le volume d'une sphère de rayon R .

- Changement de variable dans une intégrale triple

On suppose qu'avec une application régulière bijective Φ , on peut déformer le volume $\widehat{\Omega}$ pour obtenir le volume Ω : $\widehat{\Omega} \ni (\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \equiv \widehat{X} \mapsto X \equiv (x, y, z) = \Phi(\widehat{X}) \in \Omega$. On cherche à calculer l'intégrale triple $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ à l'aide d'une intégrale sur le domaine de référence $\widehat{\Omega}$. La solution consiste à former d'abord la matrice jacobienne $J(\widehat{X})$ des dérivées partielles des coordonnées dans Ω relativement aux coordonnées dans $\widehat{\Omega}$: $J(\widehat{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \widehat{y}} & \frac{\partial x}{\partial \widehat{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \widehat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \widehat{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial z}{\partial \widehat{y}} & \frac{\partial z}{\partial \widehat{z}} \end{pmatrix}$.

On a alors $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\widehat{\Omega}} f(\Phi(\widehat{X})) |\det J(\widehat{X})| d\widehat{x} d\widehat{y} d\widehat{z}$. Lors d'un changement de variables, il faut multiplier l'élément de volume $d\widehat{x} d\widehat{y} d\widehat{z}$ par la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne $|\det J(\widehat{X})|$.

Pour le parallépipède rectangle $\Omega =]a, \alpha[\times]b, \beta[\times]c, \gamma[$, on peut choisir $\widehat{\Omega} = [0, 1]^3$ et une fonction Φ affine : $x = a + (\alpha - a)\widehat{x}$, $y = b + (\beta - b)\widehat{y}$, $z = c + (\gamma - c)\widehat{z}$. Le déterminant jacobien est constant et vaut $|\Omega| = (\alpha - a)(\beta - b)(\gamma - c)$. On a alors dans ce cas

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = |\Omega| \iiint_{\widehat{\Omega}} f(\Phi(\widehat{X})) d\widehat{x} d\widehat{y} d\widehat{z}.$$

Pour une boule de centre l'origine et de rayon R , les coordonnées sphériques rappelées plus haut peuvent être utilisées. On doit prendre $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Même si la transformation associée Φ laisse des singularités à l'origine et sur l'axe vertical, la relation de changement de variable reste encore valable et le déterminant jacobien $\det J(\widehat{X})$ est égal à $r^2 \sin \theta$. Comme $r^2 \geq 0$ et $\sin \theta \geq 0$, ce déterminant est positif et on a finalement

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Comme le domaine $\widehat{\Omega}$ est le parallélépipède $[0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, les trois intégrales simples du second membre de la relation précédente se calculent dans l'ordre que l'on veut !

- Intégration par parties

On se donne une partie bornée Ω de l'espace \mathbb{R}^3 . On suppose que la frontière $\Sigma = \partial\Omega$ est une surface régulière. Pour un point $x \in \partial\Omega$ du bord de Ω , on note $n(x) \equiv (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal orienté qui pointe vers l'extérieur de Ω . On rappelle que $n(x)$ est un vecteur unitaire. On se donne enfin une application régulière f définie sur l'adhérence $\overline{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$: $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors le théorème d'intégration par parties exprime que l'intégrale de volume d'une dérivée de la fonction f dans le domaine Ω se réduit à une intégrale surfacique sur le bord $\partial\Omega$ du domaine : $\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} f n_j d\sigma$ pour j entier égal à 1, 2 ou 3.

Par exemple, pour calculer un volume, on utilise la relation précédente avec $f = z$ et $j = 3$: $|\Omega| = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} z n_z d\sigma$.

Pour une boule de rayon R centrée à l'origine, on a $z = R \cos \theta$, $n_z = \cos \theta$ et

$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Le calcul, laissé au lecteur, conduit alors à la valeur $|\Omega| = \frac{4}{3} \pi R^3$ pour le volume d'une boule de rayon R .

- Intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs

On peut combiner les trois relations d'intégration par parties du paragraphe précédent en introduisant un champ de vecteurs $\Phi: \overline{\Omega} \ni (x, y, z) \mapsto \Phi(x, y, z) \equiv (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) \in \mathbb{R}^3$ régulier sur l'adhérence de Ω . La divergence $\text{div} \Phi$ du champ de vecteurs Φ est égale à $\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$. On note avec un point le produit scalaire de \mathbb{R}^3 $\Phi \cdot n \equiv \Phi_x n_x + \Phi_y n_y + \Phi_z n_z$ le long de la frontière : les trois relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme

$$\iiint_{\Omega} \text{div} \Phi dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} (\Phi \cdot n) d\sigma.$$

On peut retrouver le volume d'une boule de rayon R en utilisant le champ de vecteurs

$\Phi(X) = X \equiv (x, y, z)$. On a $\text{div} \Phi = 3$ et $\Phi \cdot n = R$ en tout point de la sphère frontière. Alors $3|\Omega| = R^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi R = 4\pi R^3$.

Exercices

- Une intégrale triple dans un parallélépipède

On considère le parallélépipède rectangle $\Omega =]0, 1[\times]1, 2[\times]2, 3[$. On se propose de calculer l'intégrale $J = \iiint_{\Omega} (x^2 - 2yz) dx dy dz$.

- Démontrer que $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \frac{1}{3}$.
- Établir la relation $\iiint_{\Omega} yz dy dz = \frac{15}{4}$.
- En déduire la valeur de l'intégrale J .

[- $\frac{43}{6}$]

• Intégration par parties pour le rotationnel

On se donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière régulière. On se donne d'abord deux champs scalaires u et v puis deux champs de vecteurs φ et ψ réguliers définis sur $\overline{\Omega}$.

a) Montrer que $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_j(x) d\sigma$.

b) Si pour $x \in \partial\Omega$, $(\psi, n, \varphi)(x)$ désigne le produit mixte des trois vecteurs $\psi(x)$, $n(x)$ et $\varphi(x)$, montrer que l'on a la relation $\int_{\Omega} \psi \cdot \text{rot} \varphi dx = \int_{\Omega} \text{rot} \psi \cdot \varphi dx + \int_{\partial\Omega} (\psi, n, \varphi)(x) d\sigma$.

• Introduction aux problèmes elliptiques

On désigne par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 . On note $\partial\Omega$ sa frontière qu'on suppose régulière et $\overline{\Omega}$ son adhérence composée de la réunion de l'ouvert Ω et de la frontière $\partial\Omega$.

Soit f une fonction donnée de $\overline{\Omega}$ à valeurs réelles. On s'intéresse au problème suivant : chercher une fonction u de Ω à valeurs dans \mathbb{R} de sorte que $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ce problème s'appelle le problème de Dirichlet homogène pour l'équation de Poisson. Si v et w sont deux fonctions régulières de l'ouvert Ω à valeurs dans \mathbb{R} et n la normale extérieure à $\partial\Omega$, on rappelle que $\frac{\partial v}{\partial n} \equiv \nabla v \cdot n \equiv \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j$.

a) Montrer que $-\int_{\Omega} \Delta v w dx = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} w d\gamma$.

Soient u et v deux fonctions solutions du problème $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Quel système d'équations vérifie la différence $\varphi \equiv u - v$?

b) En déduire que pour toute fonction w nulle sur le bord de Ω , on a $\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla w dx = 0$.

c) En déduire que la fonction φ est identiquement nulle et que le problème de Dirichlet $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ a au plus une solution régulière.

• Calcul d'un flux

On se donne deux longueurs $R > 0$ et $a > 0$. On désigne par S la surface cylindrique définie par les deux conditions $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq a$. On note n la normale à cette surface qui pointe vers l'extérieur du cylindre. On introduit également le champ de vecteurs V défini par la relation $V(x, y, z) = (xz, yz, z^2)$.

a) Dessiner l'allure de la surface S .

b) En séparant l'étude en trois phases, calculer le flux $\Phi = \iint_S (V, n) d\sigma$ du champ de vecteurs V le long de la surface S . [2πR²a²]

c) À l'aide d'une intégration par parties, recalculer ce flux à l'aide d'une intégrale triple.

• Exercice de synthèse

On munit l'espace affine euclidien orienté \mathcal{E}_3 d'un repère orthonormé $(O; i, j, k)$. De plus, on suppose la base (i, j, k) de l'espace vectoriel associé E_3 orthonormée directe. On se donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(3, 1, 0)$, $(3, 3, 0)$ et $(3, 1, 2)$. On introduit le triangle $T_1 = OAB$.

a) Calculer la surface $|T_1|$ du triangle T_1 .

b) Calculer l'intégrale double $I_1 = \iint_{T_1} x dx dy$.

Le champ de vecteurs V est défini par les relations

$$\mathcal{E}_3 \ni M = O + xi + yj + zk \mapsto V(M) = (z - x - 1)i + (y + z)j + (z - x)k \in E_3.$$

c) Calculer $\text{div} V$ et $\text{rot} V$.

On introduit le plan affine P d'équation $z = x - y$ que l'on considère comme une surface paramétrée par x et y .

- d) Vérifier que les points O , B et C appartiennent au plan P .
- e) Quelle est la projection orthogonale du point C sur le plan horizontal $(O; i, j)$?
- f) Calculer les coordonnées du vecteur normal n au plan P dont la troisième composante est positive ou nulle.
- g) On se donne un point courant M du plan P de coordonnées $(x, y, x - y)$. Que vaut le produit scalaire $(n, V(M))$ en fonction de x et y ?

On introduit le triangle $T_2 = OCB$ et la pyramide Ω de base triangulaire T_1 et de hauteur CA .

- h) Vérifier que le triangle T_2 est paramétré par le triangle T_1 via l'application $T_1 \ni M = O + xi + yj \mapsto \Phi(M) = O + xi + yj + (x - y)k \in T_2$.
- i) Montrer que le flux ψ du champ de vecteurs V à travers le triangle T_2 peut s'écrire $\psi = \iint_{T_1} (x + 1) dx dy$.
- j) Calculer $J = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} V dx dy dz$.
- k) Montrer que la différence $J - \psi$ peut s'interpréter comme une somme de flux à travers diverses surfaces. On explicitera ces surfaces et les normales associées.