Département de Mathématiques et Statistiques

## Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

## Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, le 23 mars 2022

### Exercice 1 - Diagonalisation d'une application linéaire (d'après Tan Lei, Université d'Angers)

On considère un espace vectoriel $E$ de dimension 3 sur le corps des nombres réels. On note $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ une base de cet espace. On considère l'application linéaire (ou opérateur linéaire) $u$ de $E$ dans $E$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à cette base.

a) Quelles sont les valeurs propres de l'opérateur $u$ ?

b) Montrer que les valeurs propres de l'opérateur $u$ sont toutes distinctes.

c) Pour chacune de ces valeurs propres $\lambda_j$, expliciter un vecteur propre $r_j$.

d) Quelle est la matrice de l'application linéaire $u$ dans la base $(r_1,\, r_2,\, r_3)$ ?

### Exercice 2 - Forme de Jordan pour une application linéaire (d'après Tan Lei, Université d'Angers)

Dans le même espace vectoriel qu'à l'exercice précédent, on note $v$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ de matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ relativement à la base $(e_1,\, e_2,\, e_3)$.

a) Montrer que $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de l'opérateur $v$.

b) Quel est le vecteur propre associé ?

c) Trouver toutes les valeurs propres de l'opérateur $v$.

d) En déduire une famille $(r_1,\, r_2)$ de deux vecteurs propres indépendants pour l'application linéaire $v$, avec $v(r_1) = r_1$.

e) L'application linéaire $v$ est-elle diagonalisable ?

f) Rechercher un vecteur $s_2 \in E$ de sorte que $v(s_2) = 2\, s_2 + r_2$.

g) Le vecteur $s_2$ introduit à la question f) est-il unique ?

h) Montrer que la famille $(r_1,\, r_2,\, s_2)$ est une base de $E$.

i) Quelle est la matrice $J$ de l'opérateur linéaire $v$ dans la base $(r_1,\, r_2,\, s_2)$ ? Une telle matrice $J$ réalise une décomposition de Jordan [Camille Jordan (1838 - 1922)] de l'opérateur linéaire $v$.

François Dubois, 09 mars 2022.