le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Devoir 4, à rendre pour la séance numéro 13, le 25 mai 2022

Intégration le long de deux chemins différents

On se place dans un espace affine euclidien orienté de dimension trois. Un repère orthonormé direct $(0\,;\, e_1,\, e_2,\, e_3)$ est supposé donné. Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose $X(t) = t^2$, $Y(t) = 2\,t$ et $Z(t) = -t$. On définit ainsi un arc de courbe Γ composée de points $M(t)$ de coordonnées $(X(t),\, Y(t),\, Z(t))$ et qui part de l'origine O.

a) Quel est le vecteur tangent τ à la courbe Γ à l'origine ?

b) Quel est le vecteur normal n à la courbe Γ à l'origine ? On pourra le chercher comme combinaison linéaire des vecteurs τ et $\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}t^2}(0)$.

c) Que vaut la courbure ρ à la courbe Γ à l'origine ?

d) Que vaut la torsion θ à la courbe Γ à l'origine ?

e) Quelles sont les coordonnées du point $P = X(1)\, e_1 + Y(1)\, e_2 + Z(1)\, e_3$?

On se donne par ailleurs un champ de vecteurs Φ : $\Phi(x,\, y,\, z) = (x + z)\, e_1 - 3\, x\, y\, e_2 + x^2\, e_3$.

f) Calculer la circulation I_Γ du champ de vecteurs Φ le long de la courbe Γ.

On considère maintenant le segment de droite $S = [O,\, P]$.

g) Comment paramétrer le segment S à l'aide de $t \in [0,\, 1]$?

h) Calculer la circulation I_S du champ de vecteurs Φ le long du segment $[O,\, P]$.

i) Le champ de vecteurs Φ dérive-t-il d'un potentiel ?

François Dubois, 11 mai 2022.