le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 05

Théorème du point fixe et applications

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 5
Théorème du point fixe et applications *

- Fonctions continues sur un compact
- Exemples d'espaces de Banach
- Théorème du point fixe
- Une équation intégrale
- Equations différentielles ordinaires
- Dépendance en la condition initiale

---

* François Dubois, 2010, édition septembre 2015, 21 pages.

ch (12) Equations différentielles ordinaires

- Fonctions continues sur un compact.

Soient a, b deux réels de sorte que $a<b$. On appelle la notation $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ pour les applications continues de l'intervalle $[a,b]$ à valeurs réelles. Cet espace est muni d'une norme

(1) $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}\{|f(x)|,\ x\in[a,b]\}$, $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

Comme f est continue, on sait aussi que cette borne supérieure est atteinte sur l'intervalle compact $[a,b]$: $\exists\,\xi\in[a,b]$, $|f(\xi)|=\|f\|_\infty$. Avant de montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme, nous avons la propriété suivante.

Lemme. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. On pose, pour $\lambda\in\mathbb{R}$ fixé :

(2) $B=\lambda A=\{\lambda y,\ y\in A\}$.

Si $\lambda>0$, B est non vide majoré et

(3) $\operatorname{Sup} B = \lambda \operatorname{Sup} A$, $\lambda>0$

• La preuve de ce lemme est très élémentaire et ne demande que de connaître la définition de la borne supérieure. Si A est non vide et majorée, on sait qu'elle admet une borne supérieure (c'est l'une des propriétés fondatrices de l'ensemble des nombres réels) notée $\operatorname{Sup} A$. Cette borne supérieure est par définition le plus petit majorant. Si $y \in A$, on a donc $y \leq \operatorname{Sup} A$ car la borne supérieure est un majorant. Alors pour $\lambda > 0$, on a $\lambda y \leq \lambda \operatorname{Sup} A$, ce $\forall y \in A$. Donc le nombre réel $\lambda \operatorname{Sup} A$ majore la partie B de $\mathbb{R}$ définie par la relation (2) et $\operatorname{Sup} B \leq \lambda \operatorname{Sup} A$.

* On conclut en échangeant les rôles de A, B et en changeant λ en $\frac{1}{\lambda}$. On a, compte tenu de (2) : $A = \frac{1}{\lambda} B$ et la relation précédente appliquée à ce nouveau cas montre que $\operatorname{Sup} A \leq \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sup} B$. D'où la relation (3) car $\lambda > 0$. $\blacksquare$

Prop. L'espace $(\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est un espace normé.

- La preuve de cette proposition consiste à vérifier les axiomes d'une norme. D'une part, $\|f\|_\infty \geq 0$ si $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty = 0$ implique $f = 0$. D'autre part,

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup \{ |\lambda f(x)|,\ x \in [a,b] \}$$
$$= \sup \{ |\lambda|\, |f(x)|,\ x \in [a,b] \}$$
$$= |\lambda|\, \|f\|_\infty \quad \text{au vu du Lemme (2)(3)}$$

Enfin $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ résulte de l'inégalité triangulaire et de la définition de la borne supérieure : si $x \in [a,b]$, $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ majore l'ensemble des $|(f+g)(x)|$ pour x variant dans $[a,b]$. Il est donc plus grand que le plus petit majorant : $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f+g\|_\infty$. $\square$

Th L'espace normé $(\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet. Toute suite de Cauchy y est convergente ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

- La preuve commence simplement. Si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}^0([a,b])$, on a

(4) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \ \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$.

Alors pour $x \in [a,b]$, la suite numérique

$(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère de Cauchy puisque $|f_p(x)-f_q(x)| \leq \|f_p-f_q\|_\infty$ qui est $<\varepsilon$ si p et q sont supérieurs ou égaux à l'entier N. Mais on sait que $\mathbb{R}$ est complet. Donc la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ de Cauchy est en fait convergente. On note $f(x)$ sa limite. En passant à la limite $(q\to\infty)$ dans l'inégalité précédente, on a $|f_p(x)-f(x)| \leq \varepsilon$ si $p \geq N$. Donc on a $\|f_p-f\|_\infty \leq \varepsilon$ puisque l'inégalité précédente est vraie pour tout $x\in[a,b]$:

(5) $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall p\geq N,\ \|f_p-f\|_\infty \leq \varepsilon$.

* Une question cruciale se pose alors : la fonction f est-elle continue ? A-t-on $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$? Cette question n'est pas triviale car une limite simple de suite de fonctions continues peut très bien ne pas être continue !

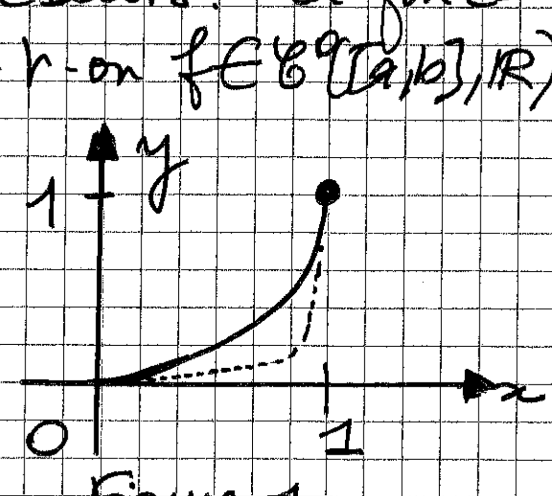

Figure 1

Ainsi la famille g_k définie par $g_k(x) = x^k$, $x\in[0,1]$ (voir la figure 1) converge pour $k\to\infty$ vers $g(x) = 0$ si $0\leq x<1$ avec $g(1)=1$ car $g_k(1) = 1$, $\forall k\in\mathbb{N}$. La fonction g n'est pas continue en $x=1$.

* La réponse vient de l'uniforme limite des f_k et en particulier de la relation (5).
Si $x, y \in [a, b]$, on a l'estimation

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)|$$

Si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver N de sorte que pour $k \geqslant N$, $\|f_k - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $z \in [a,b]$, on a

$$|f_k(z) - f(z)| \leqslant \|f_k - f\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$$

et en particulier pour $z = x$ et $z = y$ on en déduit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + |f_k(x) - f_k(y)|$$

L'entier k étant choisi assez grand, on le fixe. Alors la fonction f_k est continue. Si x est fixé dans $[a,b]$, on peut trouver $\eta > 0$ de sorte que si $|y - x| < \eta$, $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$.
Alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dans ces conditions, et f est bien continue au point $x \in [a,b]$.
Ceci est vrai quel que soit le choix du point x dans $[a,b]$, donc f est continue.

* La limite f des f_k appartient bien à $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ et cet espace de fonctions est complet. $\blacksquare$

• Exemples d'espaces de Banach.

Un espace normé complet est aussi appelé espace de Banach. C'est une structure fort utile pour les applications et nous en connaissons plusieurs exemples :

* $(\mathbb{R}, |\bullet|)$ l'ensemble $\mathbb{R}$ a été construit à partir des rationnels pour résoudre ces questions de suites "qui veulent converger" (suites de Cauchy) mais n'ont pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

* $(\mathbb{C}, |\bullet|)$ simple extension de $\mathbb{R}$ avec deux variables.

* $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|)$ sur $\mathbb{R}^n$ (n entier ≥ 1 fixé), toutes les normes sont équivalentes : si $\| \ \|_A$ et $\| \ \|_B$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, on a la propriété suivante

(6) $\exists \mu > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \frac{1}{\mu} \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq \mu \|x\|_A$.

On peut ensuite choisir (par exemple)

(7) $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$, p réel ≥ 1

(8) $\quad \|x\|_\infty = \sup \{ |x_j|, \ 1 \leq j \leq n \}$

ou de nombreux autres choix ! On peut

remarquer (exercice laissé au lecteur) que $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ $(x \in \mathbb{R}^n)$

* Si p est réel ≥ 0, $\ell^p(\mathbb{Z})$ et $\ell^p(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|\bullet\|_p$:

(9) $$\|x\|_p = \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^p\Big)^{1/p}, \quad x \in \ell^p(\mathbb{Z})$$

(ou une définition analogue avec $\ell^p(\mathbb{N})$) sont des espaces de Banach. De même pour $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ (resp $\ell^\infty(\mathbb{N})$) avec la norme

(10) $$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |x_j| \quad , \quad x \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

(respectivement $\|x\|_\infty = \sup \{|x_j|, j \in \mathbb{N}\}$ si $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$) Grâce à la théorie de la mesure de Lebesgue, ces deux espaces sont quasiment analogues à l'exemple suivant.

* $(L^p(\Omega), \|\bullet\|_p)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$ (m entier ≥ 1) et p réel ≥ 1,

(11) $$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u|^p \, dx\Big)^{1/p}, \quad u \in L^p(\Omega)$$

* $(L^\infty(\Omega), \|\bullet\|_\infty)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$,

(12) $$\|u\|_\infty = \operatorname{Inf}\{C, \ pp(x \in \Omega), \ |u(x)| \leq C\}$$

À cette longue liste s'intercale $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, muni de la norme (également notée $\|\cdot\|_\infty$) défini à la relation (1).

- Théorème du point fixe

(Th) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé complet, $f : E \to E$ une application contractante :
$\exists k \in [0,1[$ ($k<1$ Attention !) tq
$\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$.
Alors $\exists ! \, \xi \in E$, $f(\xi) = \xi$.

- La preuve consiste à effectuer des itérations de Picard. On se donne $x_0 \in E$ arbitraire puis on définit par récurrence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce à la relation de récurrence

$$(13) \qquad x_{n+1} = f(x_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

* On montre que cette suite est de Cauchy. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|x_{m+p} - x_p\| \leqslant \|x_{p+1} - x_p\| + \|x_{p+2} - x_{p+1}\| + \cdots + \|x_{p+m} - x_{p+m-1}\|$$

$$\leqslant \|x_{p+1} - x_p\| \left(1 + k + \cdots + k^{m-1}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{1-k} \|f(x_p) - x_p\|$$

car la série géométrique de raison $k \in [0,1[$ est

<u>convergente</u>. On a ensuite par récurrence

$$\|f(x_p)-x_p\| = \|f(f(x_{p-1}))-f(x_{p-1})\|$$
$$\leqslant k\,\|f(x_{p-1})-x_{p-1}\| \leqslant \cdots$$
$$\leqslant k^p\ \|f(x_0)-x_0\|.$$

On en déduit

$$(14)\quad \|x_{p+m}-x_p\| \leqslant \frac{k^p}{1-k}\,\|f(x_0)-x_0\|$$

avec un majorant qui tend vers zéro car la suite $(k^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $p\to\infty$. Donc pour $\varepsilon>0$ donné, il existe N de sorte que le membre de droite de (14) soit strictement inférieur à ε. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy : si p, q sont $\geqslant N$, $\|x_p-x_q\|<\varepsilon$.

* Comme E est complet, la suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\xi\in E$. Si on passe à la limite au sein de la relation (13), on en déduit que $f(\xi)=\xi$ car f est clairement continue. L'unicité résulte de l'aspect contractant de f. Si $f(\xi)=\xi$ et $f(\varsigma)=\varsigma$, on a :

$\|\xi-\varsigma\| = \|f(\xi)-f(\varsigma)\| \leqslant k\|\xi-\varsigma\|$, donc $(1-k)\,\|\xi-\varsigma\|\leqslant 0$ et $\xi=\varsigma$ car $\|\cdot\|$ est une norme et $1-k>0$. Le théorème est démontré. □

- Les itérations de Picard donnent également un procédé d'approximation de la solution de l'équation $f(\xi)=\xi$. Il est remarquable que pour tout $x_0 \in E$, la suite définie par la relation (13) converge vers l'unique point fixe de l'application f.

<ins>exemple élémentaire</ins>

on pose $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

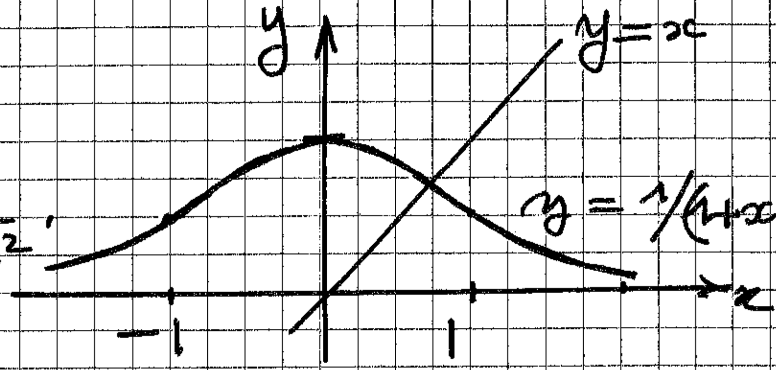

Figure 2

Pour montrer que f est contractante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il suffit d'établir qu'on a

$$(15) \qquad |f'(x)| \leq k < 1 \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet, si (15) a lieu, on a par une simple intégration

$$|f(x)-f(y)| \leq \left|\int_x^y f'(\theta)\,d\theta\right| \leq \left|\int_x^y |f'(\theta)|\,d\theta\right|$$
$$\leq k \left|\int_x^y d\theta\right| = k\,|x-y|$$

or $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, donc $|f'(x)| \leq 2\dfrac{|x|}{(1+|x|^2)^2}$

* On doit donc étudier la fonction $g(y) = 2\dfrac{y}{(1+y^2)^2}$ pour $y \geq 0$. Comme

$$\frac{dg}{dy} = \frac{2}{(1+y^2)^2} - 2y\,\frac{2\cdot 2y}{(1+y^2)^3} = \frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3},$$

On a la variation

y	0	$1/\sqrt{3}$	$+\infty$
$g(y)$	0 $\nearrow$		$\searrow$ 0

et $g(y) \leq g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \simeq 0{,}6495 < 1$.

* L'équation $\frac{1}{1+x^2} = x$ a donc une unique solution réelle (cf la figure 2) qu'on peut calculer par les itérations de point fixe définies par (13).

- <u>Une équation intégrale.</u>

On introduit $a>0$, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne de constante de Lipschitz K :

(16) $\exists K \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |\Psi(y) - \Psi(x)| \leq K|y-x|$,

et $u_0 \in \mathbb{R}$. On pose $E = \mathcal{C}^0([0,a], \mathbb{R})$, muni de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ définie à la relation (1).

* Pour $u \in E$, on pose

(17) $(f(u))(t) = u_0 + \int_0^t \Psi(u(\theta))\, d\theta$, $u \in \mathcal{C}^0([0,a], \mathbb{R})$.

Alors $[0,a] \ni t \mapsto (f(u))(t) \in \mathbb{R}$ définit une fonction $f(u)$ qui est <u>continue</u> de la variable t. En effet, $\theta \mapsto u(\theta)$ est continue par hypothèse et $\mathbb{R} \ni y \mapsto \Psi(y) \in \mathbb{R}$ est également continue compte tenu de (16). Donc $[0,a] \ni \theta \mapsto (\Psi \circ u)(\theta) \in \mathbb{R}$ est continue comme composée de deux applications continues.

Donc l'application $[0,a] \ni t \mapsto \int_0^t \psi(u(\theta))\,d\theta \in \mathbb{R}$ est dérivable, donc continue. Lui rajouter la constante u_0 ne modifie pas cette propriété. Donc $f(u) \in E$ si $u \in E$ et f est bien définie comme application de E dans E. On a la proposition suivante.

Prop Si $Ka < 1$, l'application f de E dans E ($E = \mathcal{C}^0([0,a],\mathbb{R})$) définie par la relation (17) est contractante :

(18) $\| f(u) - f(v) \|_\infty \leq Ka \, \|u - v\|_\infty$.

• La preuve de cette proposition n'offre pas de difficulté. Pour $t \in [0,a]$, on a

$$\begin{aligned}
| f(u)(t) - f(v)(t) | &= \left| \int_0^t (\psi(u(\theta)) - \psi(v(\theta)))\,d\theta \right| \\
&\leq \int_0^t | \psi(u(\theta)) - \psi(v(\theta)) |\,d\theta \\
&\leq \int_0^t K\,|u(\theta) - v(\theta)|\,d\theta \qquad \text{cf (16)} \\
&\leq K t \ \sup\{ |u(\theta) - v(\theta)|,\ 0 \leq \theta \leq t \} \\
&\leq K a \ \|u - v\|_\infty \qquad \text{sans ménagement !}
\end{aligned}$$

Donc la relation (18) est établie, en considérant la borne supérieure du membre de gauche de l'inégalité précédente. $\square$

* La condition $Ka < 1$ indique que pour ψ donnée (de la forme αy ou $\alpha y + \beta \sin y$ ou $\gamma |y|$ ou $\delta \operatorname{arctg} y$ pour donner quelques exemples), on peut fixer un (petit) <u>intervalle</u> $[0, a]$ $(a > 0)$ où $f : E \to E$ est contractante.

- Le théorème du point fixe nous fournit alors le résultat suivant.

(Th) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à K (voir l'inégalité (16)) et $a > 0$ de sorte que $Ka < 1$. Alors l'équation fonctionnelle

$$(19) \quad u(t) = u_0 + \int_0^t \psi(u(\theta))\, d\theta \;, \quad 0 \leq t \leq a$$

a une <u>unique solution</u> $u \in \mathcal{C}^0([0,a], \mathbb{R})$, i.e. u <u>continue</u> sur $[0, a]$.

- La seule remarque est que (19) est issu de la relation (17) en prenant $f(u) = u$ pour le point fixe de l'application f. $\square$

- <u>Equation différentielle.</u>

L'interprétation traditionnelle de l'équation fonctionnelle (19) est fondamentale. Nous avons vu que si u est continue de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, le membre de droite de (19) est une fonction dérivable de t. Donc il en est de même du membre de gauche ! On en déduit

$$(20) \qquad \frac{du}{dt} = \varphi(u(t)), \quad 0 \leq t \leq a$$

et l'équation intégrale se transforme en équation différentielle. De plus, pour $t=0$, on déduit immédiatement de (19) :

$$(21) \qquad u(0) = u_0 .$$

- La solution de (19) est solution du système dynamique (20)(21), formé de l'équation d'évolution (20) et de la condition initiale (21). Réciproquement, si φ vérifie la relation (16) et u le système (20)(21), il vérifie clairement la relation (19) par intégration de (20) entre 0 et t :

$$\int_0^t \frac{du}{d\theta}\, d\theta = \int_0^t \varphi(u(\theta))\, d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^t \frac{du}{d\theta}\, d\theta = u(t) - u(0)$$
$$= u(t) - u_0 .$$

Pourtant, on "sent bien" que tout se passe a priori au voisinage de u_0, et l'hypothèse (16) peut être affaiblie pour la condition "φ est localement lipschitzienne". Ceci conduit au théorème de Cauchy-Lipschitz, que nous admettons ici, ayant donné l'essentiel des idées au cours des paragraphes précédents.

Th de Cauchy-Lipschitz.

Soit $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne :

$$(22)\left\{\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R}, \exists K_x \geq 0, \exists \eta_x > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}, \\ \left(|y-x| < \eta_x, |z-x| < \eta_x\right) \Rightarrow |\Psi(y) - \Psi(z)| \leq K_x |y-z|\end{array}\right.$$

alors $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, $\exists a(u_0) > 0$, tel que le problème (20)(21) a une unique solution u définie sur $[0, a(u_0)]$. C'est une application continue qui satisfait à l'équation fonctionnelle (19) pour $0 \leq t \leq a(u_0)$.

- Nous n'insistons pas dans le cadre de ce cours sur la notion de solution maximale du problème (20)(21). Toutefois si $u(\bullet)$ est définie sur un intervalle I qui contient 0, le théorème de Cauchy-Lipschitz fournit un "germe" de solution (unique!) dont il est naturel de se demander si on peut l'étendre "le plus possible". La réponse est oui (nous renvoyons le lecteur pour ce sujet au livre de J.P. Demailly "Analyse Numérique et Equations différentielles", Presses Universitaires de Grenoble, 1996) et un intervalle maximal de définition de la solution de

$$(23)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{du}{dt} = \Psi(u(t)), \quad t \in I, \quad I \ni 0 \\ u(0) = u_0\end{array}\right.$$

existe et est unique si φ est localement lipschitzienne. Afin de faire sentir au lecteur la difficulté, nous donnons deux exemples.

- Cas où $\varphi(u) = u$, $u_0 = 1$. Alors $u(t)$ vaut nécessairement $u(t) = e^t u_0$, comme le montre le calcul suivant. Soit $v(t) \equiv e^{-t} u(t)$ avec

(24) $\dfrac{du}{dt} = u(t)$, $u(0) = 1$.

Alors $\dfrac{dv}{dt} = -v + e^{-t} u = 0$; la fonction v est constante sur l'intervalle I où $u(\bullet)$, introduite à la relation (24), peut être définie. Donc cette constante vaut 1, ce qui montre que toute solution de (24) s'écrit sous la forme $u(t) = e^t u_0$. Comme cette fonction est bien définie pour $t \in \mathbb{R}$, le germe fourni sur $[0, a]$ (avec $a < 1$) par le théorème de Cauchy-Lipschitz est en fait prolongeable à $\mathbb{R}$ tout entier. La solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

- Si $\varphi(u) = 1 + u^2$ et $u_0 = 0$, on se convainc sans difficulté que $u(t) = \operatorname{tg} t$. On vérifie d'abord que $u(t) = \operatorname{tg} t$ est bien "une" solution du problème (23) avec les données ci-dessus : $\dfrac{d}{dt}(\operatorname{tg} t) = 1 + (\operatorname{tg} t)^2$ et $\operatorname{tg}(0) = 0$. Ensuite, si on pose $v(t) = \operatorname{Arctg}(u(t))$,

On a $\frac{dv}{dt} = 1$, donc $v(t) = t$ car $v(0) = 0$.
Donc $u(t)$ est nécessairement de la forme $u(t) = \operatorname{tg} t$. Le problème alors est que l'intervalle maximal de cette fonction (en tant que fonction continue de la variable t) est $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
La solution de (23) avec $\varphi(u) = 1+u^2$ et $u_0 = 0$ ne peut pas être prolongée à $\mathbb{R}$ tout entier. Il y a "explosion en temps fini" ($u(t) \nearrow +\infty$ si $t \nearrow \pi/2$), qui constitue l'un des phénomènes caractéristiques décrits par des équations différentielles.

- Généralisation à d'autres équations différentielles.

Avec le système (20)(21), φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise sans difficulté à $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Th de Cauchy-Lipschitz. Forme plus générale.

Soit m entier ≥ 1, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ et $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne :

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^m, \exists K_x \geq 0, \exists \eta_x > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \\ (\|y - x\| < \eta_x \text{ et } \|z - x\| < \eta_x) \Rightarrow (\|\varphi(y) - \varphi(z)\| \leq K_x \|y - z\|) \end{array} \right.$$

alors $\forall u_0 \in \mathbb{R}^m$, $\exists a(u_0) > 0$, tel que le problème

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} = \varphi(U(t)), \quad 0 \leq t \leq a(u_0) \\ U(0) = u_0 \end{array} \right.$$

a une solution unique $U \in \mathcal{C}^0([0, a(u_0)], \mathbb{R}^m)$.

Cet énoncé général permet de traiter sans difficulté (mais avec des hypothèses parfois un peu plus fortes, voir le livre de Demailly) les cas suivants.

- Second membre qui dépend du temps. Pour l'équation

$$(27) \qquad \frac{du}{dt} = \varphi(t, u(t)) \;, \quad t \geq 0 \;, \; u(t) \in \mathbb{R} \;,$$

il suffit de poser $U = (\theta, u) \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(U) = (1, \varphi(\theta, u))$, qu'on suppose localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La solution du système différentiel (26) avec $U_0 = (0, u_0)$ permet d'introduire $\theta(t)$ solution de $\frac{d\theta}{dt} = 1$, $\theta(0) = 0$, c'est à dire $\theta(t)$, puis $u(t)$ solution de $\frac{du}{dt} = \varphi(\theta(t), u(t))$, c'est à dire de l'équation (27).

- Système d'ordre 2. On se donne l'équation d'évolution du second ordre (pour fixer les idées)

$$(28) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = f\Big(u(t), \frac{du}{dt}\Big) \;, \quad t \geq 0 \;, \; u(t) \in \mathbb{R}$$

avec la condition initiale

$$(29) \qquad u(0) = u_0 \;, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0 \;.$$

Ce cas se ramène au précédent en posant $U = (u(t), v(t))$, $U_0 = (u_0, v_0)$, $\Phi(U) = (v, f(u,v))$.

Si la fonction $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est localement lipschitzienne, i.e. si f est localement lipschitzienne par rapport à ses deux arguments, on a une solution locale unique pour le système (26). On la réinterprète puisque $\frac{du}{dt} = v$ et $\frac{dv}{dt} = f(u(t), v(t))$ en remplaçant $v(t)$ par sa valeur $\frac{du}{dt}$. Alors $u(t)$ est clairement solution de l'équation (28). La condition initiale (29) s'écrit clairement $U(0) = U_0$.

- Dépendance en la condition initiale

On se donne $u(t) \in \mathbb{R}$ solution de (23) (pour fixer les idées) et $v(t)$ solution de

$$(30) \begin{cases} \frac{dv}{dt} = \Psi(v(t)) , & t \in I, \ I \ni 0 \\ v(0) = v_0 . \end{cases}$$

Comment la différence $|u(t) - v(t)|$, c'est à dire l'erreur si on remplace la condition initiale $u(0) = u_0$ par $v(0) = v_0$, se comporte-t-elle ? Nous donnons ici un résultat non optimal, mais significatif.

(Th) Contrôle de la trajectoire.

Soit $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne de constante K (cf (16)), a tel que $Ka < 1$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$. Soit $u(t)$ et $v(t)$ les solutions de (23) et (30) respectivement, données par le théorème de Cauchy-Lipschitz. On a alors l'estimation

(31) $\quad |u(t)-v(t)| \leq e^{Kt}\, |u_0-v_0|\,, \quad 0 \leq t \leq a$

• La preuve repose sur le lemme de Gronwall dont nous donnons ci-dessous un énoncé dans un cas particulier.

Prop Lemme de Gronwall

Soit $y(t)$ une fonction positive telle que

(32) $\quad y(t) \leq \varphi + K \int_0^t y(\theta)\, d\theta\,, \quad t \geq 0$

où φ et K sont des nombres réels positifs fixés. Alors on a

(33) $\quad y(t) \leq e^{Kt}\, \varphi\,, \quad t \geq 0.$

∘ On remarque que le membre de droite de (33) correspond au cas d'égalité dans (32).

• La preuve de cette proposition est facile si on s'y prend bien ... On pose $z(t) = \varphi + \int_0^t K y(\theta)\, d\theta$; c'est une fonction dérivable et

$$\frac{dz}{dt} = Ky \leq K z(t) \text{ compte tenu de (32).}$$

Donc $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(e^{-Kt} z(t)\right) = e^{-Kt}\left(-Kz + \frac{dz}{dt}\right) \leq 0,$

et $e^{-Kt} z(t) \leq z(0) = \varphi$. Donc

$$y(t) \leq z(t) \leq \varphi e^{Kt}$$ au vu de ce qui vient d'être établi. La relation (33) est donc vraie. $\square$

• La preuve du théorème de contrôle de la trajectoire consiste à partir de la représentation intégrale (19) :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \Psi(u(\theta))\, d\theta \,; \quad v(t) = v_0 + \int_0^t \Psi(v(\theta))\, d\theta \,.$$

Donc $$|u(t) - v(t)| \leq |u_0 - v_0| + \int_0^t |\Psi(u(\theta)) - \Psi(v(\theta))|\, d\theta$$
$$\leq |u_0 - v_0| + \int_0^t K\, |u(\theta) - v(\theta)|\, d\theta$$

car Ψ est lipschitzienne. On pose $y(t) = |u(t) - v(t)|$ et $\varphi = |u_0 - v_0|$. Nous venons donc d'établir l'inégalité "bouclée" (32) et sa résolution (33) exprime exactement la conclusion (31) du théorème. $\square$

Dubois

25 janvier 2010.

Suite aux remarques proposées par Claude Durand, auditeur au CNAM en 2010-2011, corrections de quelques coquilles le 5 juin 2011.

D.