le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 12
Compléments de calcul intégral

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 12

Compléments de calcul intégral *

a) Compléments de calcul intégral

- Convolution
- Intégrales de coutour
- Intégration par parties
- Quelques espaces fonctionnels
- Inégalité de Hölder
- Les espaces L^p sont des espaces de Banach

b) Autour de l'intégration par parties

- Formule de Green
- Application aux champs de vecteurs

c) Quelques applications classiques

- Calcul d'un produit de convolution
- Introduction aux problèmes elliptiques
- Calcul d'une différentielle classique
- Dériver des fonctionnelles

---

* François Dubois, 2010, édition septembre 2015, 40 pages.

ch (10) $\boxed{\text{Compléments de calcul intégral}}$

- Convolution.

une opération importante qu'on peut effectuer avec des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$ mais nous n'aborderons pas ici cette généralisation) est la convolution. Si f et g sont deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la convolée $f*g$ est définie par la relation

$$(1) \qquad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy .$$

Deux questions naturelles: le membre de droite de la relation (1) est-il défini? quelles sont les propriétés de la fonction $f*g$? Le théorème qui suit donne une réponse à ces deux questions lorsque f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire lorsque

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty , \quad \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, dy < \infty .$$

(Th) Produit de convolution.

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ (ie f et g vérifient (1)).

alors presque partout ($x \in \mathbb{R}$) la fonction

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x-y)\, g(y) \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et la relation (1) définit $(f * g)(x)$ presque partout pour $x \in \mathbb{R}$. De plus, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et on a l'estimation

$$(3) \qquad \| f * g \|_1 \leqslant \| f \|_1 \, \| g \|_1 ,$$

avec $\| \varphi \|_1 \equiv \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx$ si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

- La preuve de ce résultat est une simple application du théorème de Fubini. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la relation $F(x,y) = f(x-y)\, g(y)$. Montrons que $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ sous l'hypothèse (2) que f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$. On calcule la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} |F(x,y)|\, dx\, dy$ et on peut utiliser le théorème de Fubini si celle-ci est un nombre réel (i.e. si cette intégrale n'est pas égale à $+\infty$). Or pour $y \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\, g(y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx .$$

On change de variable, grâce à $z = x - y$.

alors $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\, dz = \| f \|_1$

Donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx = \| f \|_1 \, |g(y)|$,

puis $\int_{\mathbb{R}} dy \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx \right] = \| f \|_1 \, \| g \|_1$ qui est fini puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

* Le théorème de Fubini affirme qu'alors presque partout pour $x \in \mathbb{R}$, l'application partielle $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, ce qui entraîne que $(f*g)(x)$ a un sens presque partout pour $x \in \mathbb{R}$. Le premier point du théorème est établi.

* On a ensuite $\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} dx \left| \int_{\mathbb{R}} dy\, f(x-y) g(y) \right|$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy\, |f(x-y)|\,|g(y)|$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx\, |f(x-y)|\,|g(y)| = \|f\|_1 \|g\|_1$$

ainsi qu'établi plus haut. Donc $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ et la relation (3) est démontrée. $\blacksquare$

- <u>Intégrales de contour</u>

Afin d'énoncer le théorème d'intégration par parties, nous rappelons rapidement comment on donne un sens à l'intégrale

$$(4) \qquad I = \int_{\Gamma} g(x)\, d\gamma(x)$$

où Γ est une courbe régulière du plan, g une fonction (disons continue pour fixer les idées) sur Γ, et $d\gamma$ l'élément de longueur le long de la courbe Γ. On a en particulier

$$(5) \qquad \int_\Gamma d\gamma = |\Gamma|, \text{ longueur de l'arc } \Gamma.$$

* Nous pouvons supposer l'arc Γ paramétré par une fonction φ :
$[0,1] \ni \theta \mapsto \varphi(\theta) \in \Gamma$
avec $\varphi(0) = A$ "première extrémité de Γ" et $\varphi(1) = B$, l'autre extrémité, ainsi qu'illustre Figure 1.

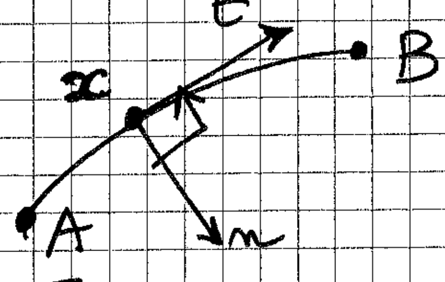

Figure 1.

On a donc

$$(6) \qquad x = \varphi(\theta), \quad x \in \Gamma, \quad \theta \in [0,1].$$

On suppose la fonction φ continuement dérivable. Alors l'arc Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a par dérivation de (6) :

$$(7) \qquad dx = \varphi'(\theta)\, d\theta.$$

Si le vecteur tangent est unitaire (de norme euclidienne égale à 1) alors le paramètre correspondant est la longueur d'arc $d\gamma$. On a donc également

$$(8) \qquad dx = t\, d\gamma$$

avec $\|t\| = 1$. On peut identifier les relations

(7) et (8) et il vient $\varphi'(\theta) = t\,\frac{d\gamma}{d\theta}$.
Si on impose la relation $\|t\| = 1$, on tire

(9) $$d\gamma = \|\varphi'(\theta)\|\, d\theta$$

qui permet de calculer l'élément de longueur d'arc $d\gamma$ en fonction du paramétrage $x = \varphi(\theta)$ choisi.

exemple, soit Γ le segment de droite défini par $\Gamma = \{(x, 1-x),\ 0 \leq x \leq 1\}$ qui joint les points $(1,0)$ et $(0,1)$ via la droite du plan d'équation $x + y = 1$. On a le paramétrage $\varphi(\theta) = (\theta, 1-\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Donc $\|\varphi'(\theta)\| = \sqrt{2}$ et $d\gamma = \sqrt{2}\, d\theta$. On en tire $|\Gamma| = \sqrt{2}$, ce qui était attendu car Γ est la diagonale du carré unité.

exemple Si Γ est l'arc du cercle unité défini par $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (pour fixer les idées). On a cette fois un vecteur $\varphi'(\theta)$ qui vérifie $\varphi'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$, donc qui est unitaire. On en déduit $d\gamma = d\theta$, $|\Gamma| = \pi/2$, qui ne surprend pas pour la longueur du quart de cercle unité. [Le lecteur transformera sans difficulté le texte de cet exemple pour se ramener au cas d'un paramètre entre 0 et 1, supposé dans le reste de ce texte].

* Une fois le vecteur tangent t calculé grâce à la simple relation $t = \frac{1}{\|\varphi'(\theta)\|}\,\varphi'(\theta)$, le vecteur normal n s'en déduit (traditionnellement) par une rotation d'angle $-\pi/2$:

(10) $$n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t \ ; \quad t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n .$$

* L'intégrale I se calcule "en pratique" selon la relation

(11) $$\int_\Gamma g(x)\, d\gamma(x) = \int_0^1 g(\varphi(\theta))\, \|\varphi'(\theta)\|\, d\theta .$$

Tout l'intérêt de cette démarche est qu'elle est <u>intrinsèque</u>, c'est à dire ne dépend <u>pas</u> du paramétrage $\varphi(\theta)$ choisi pour la courbe Γ.

(ex) Supposons que le point $x(\theta)$ sur le cercle "tourne deux fois trop vite", $x(\theta) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$. On a alors $d\gamma = 2\,d\theta$, mais $x(\theta)$ passe de $A = (1,0)$ à $B = (0,1)$ avec un intervalle de longueur $\frac{\pi}{4}$. Alors $|\Gamma| = \int_0^{\pi/4} d\gamma = 2\int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui ne modifie pas (bien sûr) la longueur du quart de cercle !

- <u>Intégration par parties.</u>

Nous généralisons dans ce paragraphe la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral "à une variable":

(11) $$\int_a^b \frac{df}{dt}\,dt = f(b) - f(a).$$

* Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^N$, mais il faudrait pour énoncer le résultat correspondant faire un peu plus de géométrie différentielle) de frontière $\partial\Omega$ régulière (une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$) ou de frontière polygonale par morceaux (ou un mélange des deux, on dit alors que $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on peut introduire la normale extérieure n le long de $\partial\Omega$ (sauf si Ω a certaines pathologies géométriques de type "fissure", exclues ici) [la normale est discontinue si $\partial\Omega$ est polygonale]. Si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (continûment dérivable dans un voisinage de $\overline{\Omega}$), on a

(12) $$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} f\, n_j \, d\gamma$$

où $j \in \{1, 2\}$ est une coordonnée et $n = (n_1, n_2)$ est un vecteur unitaire le long de la frontière (voir la figure 2)

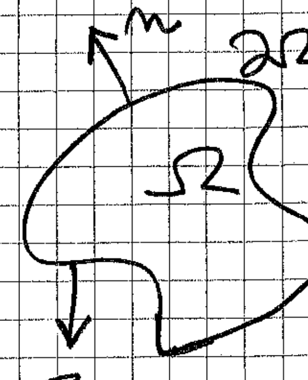

Figure 2

* Les relations (11) et (12) sont identiques si $a<b$ et $\Omega =]a,b[$ est l'intervalle $]a,b[$; le seul point non banal est de se rendre compte que $f(b) - f(a) = \int_{\partial(]a,b[)} f n \, d\gamma$ puisque la normale n a maintenant une seule composante.
On a $\partial(]a,b[) = \{a\} \cup \{b\}$, formé de deux points et la mesure naturelle sur un tel ensemble est la mesure de comptage.
On a donc $\displaystyle\int_{\partial(]a,b[)} f \, n \, d\gamma = f(a) n_a + f(b) n_b$
ce qui nous rapproche du résultat. Ensuite, puisque $a<b$, la direction "extérieure" à $]a,b[$ est $+1$ en $x = b$, soit $n_b = +1$ et -1 en $x = a$, soit $n_a = -1$. Ceci établit que la relation (11) correspond bien à écrire (12) dans le cas de la dimension 1 d'espace.

Prop La relation d'intégration par parties (12) est vraie si Ω est le triangle "de référence" $\widehat{K}$ défini par

(13) $\quad \widehat{K} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \; x_j \geq 0, \; x_1 + x_2 \leq 1 \}$

• La preuve de cette proposition consiste à calculer séparément les deux contributions à la relation (12). Nous commençons

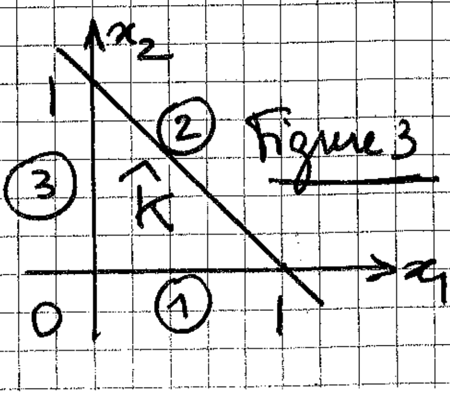

Figure 3

par l'intégrale de contour. Avec une numérotation des arêtes $\hat{a}_j$ du triangle $\hat{K}$, on a $\widehat{n}_1 = (0,-1)$, $\widehat{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\widehat{n}_3 = (-1,0)$.

Pour $\hat{a}_1$, nous avons $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\theta, 0)$, pour $\hat{a}_2$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\theta, 1-\theta)$ et pour $\hat{a}_3$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,\theta)$. Donc $d\gamma_1 = d\theta$, $d\gamma_2 = \sqrt{2}\, d\theta$, $d\gamma_3 = d\theta$. Il en résulte

$$\int_{\partial \hat{K}} f n \, d\gamma = \int_0^1 f(\theta,0)\, \widehat{n}_1 \, d\theta + \int_0^1 f(\theta, 1-\theta)\, \widehat{n}_2 \sqrt{2}\, d\theta + \int_0^1 f(0,\theta)\, \widehat{n}_3 \, d\theta .$$

Pour la première composante ($j=1$):

$$(14) \quad \int_{\partial \hat{K}} f n_1 \, d\gamma = \int_0^1 f(\theta, 1-\theta)\, d\theta - \int_0^1 f(0,\theta)\, d\theta$$

et pour la seconde ($j=2$), on a :

$$(15) \quad \int_{\partial \hat{K}} f n_2 \, d\gamma = -\int_0^1 f(\theta,0)\, d\theta + \int_0^1 f(\theta, 1-\theta)\, d\theta .$$

* Nous calculons maintenant le membre de gauche, qui est une intégrale double. Pour $j=1$, nous avons :

$$\int_{\hat{K}} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1$$

$$= \int_0^1 \left[f(1-y, y) - f(0,y) \right] dy$$

$$= \int_0^1 f(x, 1-x)\, dx - \int_0^1 f(0,y)\, dy$$

et nous reconnaissons la relation (14). Pour $j=2$, il vient :

$$\int_{\hat K} \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx = \int_0^1 dx \left(\int_0^{1-x} \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2\right)$$

$$= \int_0^1 \left[f(x,1-x) - f(x,0)\right] dx$$

$$= -\int_0^1 f(x,0)\,dx + \int_0^1 f(x,1-x)\,dx$$

qui est exactement le membre de droite de la relation (15). Les deux contributions de la relation (12) sont établies et la proposition est démontrée. $\square$

- Nous montrons maintenant la relation (12) si $\Omega = K$, un triangle curviligne issu de $\hat K$ par une transformation régulière (cf la figure 4)

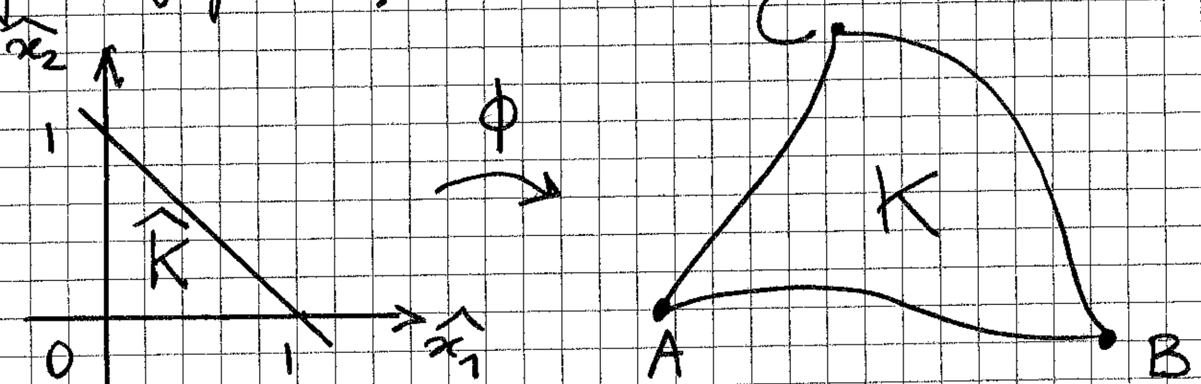

Figure 4.

Nous commençons par une proposition géométrique concernant une courbe tracée sur K (Figure 5).

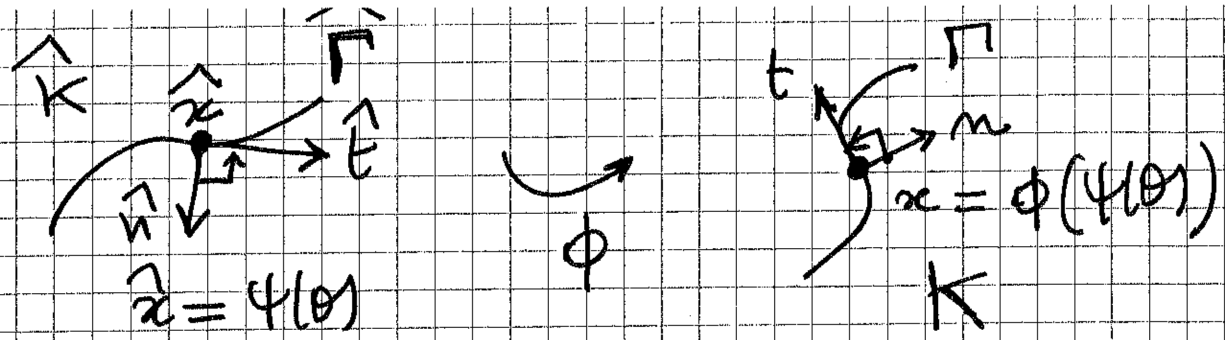

Figure 5

Prop Soit $x = \phi(\psi(\theta))$ une courbe Γ tracée sur le triangle curviligne K et $\hat{x} = \psi(\theta)$ son image dans $\hat{K}$ par ϕ^{-1}. Soit $\hat{n}$ la normale à $\hat{\Gamma}$ en $\hat{x}$ et n la normale à Γ en x. Soit $J(x)$ le jacobien de ϕ au point $\hat{x}$:

(16) $\quad J(x) = \left| \det d\phi(\hat{x}) \right|$.

On a

(17) $\quad \hat{n} = \dfrac{1}{J} \dfrac{d\gamma}{d\hat{\gamma}} \, d\phi^t(\hat{x}) \cdot n$

- La preuve de cette proposition est de la géométrie différentielle telle qu'introduite aux relations (5) à (11). On a sur $\hat{\Gamma}$:

(18) $\quad d\hat{x} = \psi'(\theta)\, d\theta \equiv \hat{t}\, d\hat{\gamma}$

et sur Γ : $\quad dx = d\phi(\hat{x}) \cdot \psi'(\theta)\, d\theta$

$$= d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{t}\, d\hat{\gamma} \qquad \text{(cf (18))}$$

$$\equiv t \, d\gamma \quad \text{par définition de la longueur d'arc}$$

On en déduit la relation suivante entre les vecteurs tangents :

$$t = \frac{d\hat{\gamma}}{d\gamma}\, d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{t}$$

ou bien

$$(19) \qquad \hat{t} = \frac{d\gamma}{d\hat{\gamma}}\, d\phi^{-1}(x) \cdot t$$

Compte tenu de (10), la relation (19) s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{n} = \frac{d\gamma}{d\hat{\gamma}}\, d\phi^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n \text{ , d'où}$$

$$(20) \qquad \hat{n} = \frac{d\gamma}{d\hat{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n$$

* Il suffit maintenant de calculer la matrice qui apparaît au membre de droite de la relation (20). Si $d\phi(\hat{x})$ s'écrit par exemple $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $J \equiv ad - bc$ et

$$d\phi^{-1}(x) = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}. \text{ Alors}$$

$$d\phi^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{J}\, d\phi^{t}(\hat{x}).$$

La relation (17) résulte alors de (20) et du calcul précédent si ϕ ne change pas l'orientation ($J > 0$). Il faut changer la direction de n si $J < 0$. D'où le résultat. $\square$

(Hv) Intégration par parties dans un triangle curviligne.

Soit K un triangle curviligne paramétré à l'aide de $\hat{K}$ (défini en (13)) et Φ (Figure 4). Soit $K \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ une fonction régulière définie sur K. On a la relation (12), qu'on peut écrire de nouveau :

(21) $$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial K} f\, n_j\, d\gamma .$$

- La preuve consiste à utiliser le changement de variable $\hat{K} \ni \hat{x} \longmapsto \phi(\hat{x}) = x \in K$ et à calculer l'intégrale au membre de gauche de (21) à l'aide de la relation classique

(22) $$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\hat{K}} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, |\det d\phi(\hat{x})|\, d\hat{x} .$$

Il faut exprimer $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en fonction des variations de la fonction f relativement à $\hat{x}$.

On peut écrire $f(x) = f(\phi(\hat{x})) \equiv \hat{f}(\hat{x})$.

Donc $f(x) = \hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}(\phi^{-1}(x))$. D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_\ell \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_\ell} \frac{\partial \hat{x}_\ell}{\partial x_j} = \sum_\ell \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_\ell}\, d\phi^{-1}(x)_{\ell j}$$

$$= \sum_\ell \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_\ell}\, d\phi^{-t}_{j\ell}$$

On en déduit

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\hat K} \sum_\ell \frac{\partial \hat f}{\partial \hat x_\ell} \left(d\phi^{-t}_{j\ell}\, J\right) d\hat x$$

• Montrons que l'on a :

$$(23) \qquad \sum_\ell \frac{\partial}{\partial \hat x_\ell} \left(J\, d\phi^{-t}_{j\ell}\right) = 0 .$$

En effet, si $d\Phi(\hat x)_{jk} = \dfrac{\partial x_j}{\partial \hat x_k}$, on a vu (page 12) que l'on a

$$(24) \quad J\, d\phi^{-t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial \hat x_2} & -\dfrac{\partial x_2}{\partial \hat x_1} \\ -\dfrac{\partial x_1}{\partial \hat x_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \hat x_1} \end{pmatrix}$$

Donc pour $j=1$,

$$\sum_\ell \frac{\partial}{\partial \hat x_\ell} \left(J\, d\phi^{-t}_{1\ell}\right) = \frac{\partial}{\partial \hat x_1}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \hat x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \hat x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \hat x_1}\right) = 0$$

compte tenu de l'identité de Schwarz d'interversion de l'ordre de dérivation. De même,

$$\sum_\ell \frac{\partial}{\partial \hat x_\ell} \left(J\, d\phi^{-t}_{2\ell}\right) = \frac{\partial}{\partial \hat x_1}\left(-\frac{\partial x_1}{\partial \hat x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \hat x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \hat x_1}\right) = 0,$$

ce qui achève d'établir ce lemme. $\square$

* On peut maintenant appliquer la relation (12) pour le triangle de référence $\hat K$. En effet, compte tenu de (23), on a

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \sum_\ell \int_{\hat K} \frac{\partial}{\partial \hat x_\ell} \left(J\, \hat f\, d\phi^{-t}_{j\ell}\right) d\hat x$$

$$= \int_{\partial \hat K} \sum_{l} J \hat f \, \hat n_l \, d\phi^{-t}_{jl} \, d\hat\gamma$$

$$= \int_{\partial \hat K} J \hat f(\hat x) \left(d\phi^{-t} \cdot \hat n\right)_j d\hat\gamma$$

or $\hat n$ a été calculé à la relation (17). Nous en déduisons

$$J \, d\phi^{-t} \cdot \hat n = J \, d\phi^{-t} \left(\frac{1}{J} \frac{d\gamma}{d\hat\gamma} \, d\phi^{t} \cdot n \right)$$

$$= \frac{d\gamma}{d\hat\gamma} \, d\phi^{-t} \cdot d\phi^{t} \cdot n = \frac{d\gamma}{d\hat\gamma} \, n .$$

D'où

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial \hat K} \hat f(\hat x) \, n_j \, \frac{d\gamma}{d\hat\gamma} \, d\hat\gamma$$

$$= \int_{\partial K} f(x) \, n_j \, d\gamma$$

par un simple changement de variable dans l'intégrale de bord. Nous obtenons in fine le membre de droite de (2) et la propriété est démontrée. □

H4 Intégration par parties dans un domaine de frontière polygonale.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est polygonale, i.e. une réunion de segments de droites. Alors la relation (12) est vraie

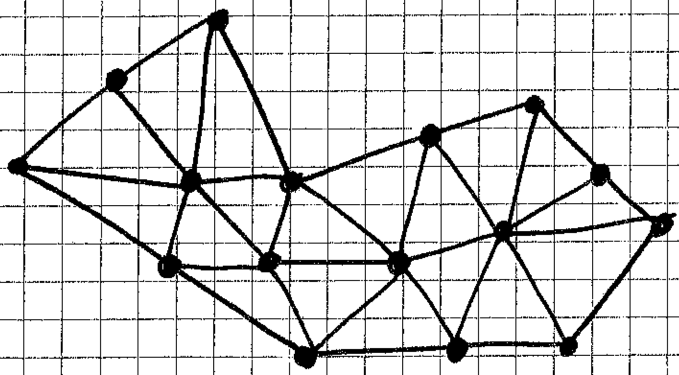

Figure 6. Triangulation du domaine Ω à frontière polygonale

- La preuve de ce théorème consiste à se ramener au cas de triangles droits grâce à une triangulation $\mathcal{T}$. Puisque $\partial\Omega$ est polygonale, il existe une famille $\mathcal{T}^2$ de triangles de sorte que

$$(25) \qquad \overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}^2} \overline{K}$$

Une triangulation $\mathcal{T}$ est telle que pour K et L arbitraires de $\mathcal{T}^2$, l'intersection $\overline{K} \cap \overline{L}$ est ou bien vide, ou bien formée d'un sommet $S \in \mathcal{T}^0$ du maillage, ou bien formée d'une arête $a \in \mathcal{T}^1$ de ce même maillage (voir la figure 6). Dans tous les cas elle est de mesure nulle si $K \neq L$. On a donc

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}^2} \int_K \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{T}^2} \int_{\partial K} f n_j \, d\gamma \qquad \text{compte tenu de (21)}$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{T}^2} \; \sum_{a\in\mathcal{T}^1,\, a\subset\partial K} \int_a f n_j \, d\gamma .$$

Cette somme porte en fait sur toutes les arêtes du maillage. Pour les arêtes a intérieures, il existe deux triangles K_1 et K_2 qui contiennent a dans leur bord : $a \subset \partial K_1$, $a \subset \partial K_2$, $K_1 \neq K_2$. Mais n_j est toujours une normale extérieure au triangle K. Donc si n_j^1 (resp n_j^2) désigne la normale extérieure à K_1 (resp K_2) portée par l'arête a, on a $n_j^1 + n_j^2 = 0$. Donc les termes correspondants aux arêtes intérieures s'annulent deux à deux. Il reste les arêtes du bord, qui elles ne sont frontières que d'un seul triangle. Nous avons donc

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} \, dx = \sum_{\substack{a\in\mathcal{T}^1 \\ a\subset\partial\Omega}} \int_a f n_j \, d\gamma = \int_{\partial\Omega} f n_j \, d\gamma$$

en regroupant toutes les arêtes au bord du domaine. La relation (12) en résulte et le théorème est démontré. $\square$

{ Corrections de coquilles le 5 juin 2011; Dubois }

Corollaire

Si u, v sont des fonctions régulières sur Ω, domaine borné de $\mathbb{R}^2$, on a

$$(26)\qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_j \, d\gamma .$$

• La relation (26) n'est qu'une réécriture de la relation (12) lorsque $f = uv$, puisqu'on a la règle de Leibniz : $\frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}$ ☐

• Quelques espaces fonctionnels

L'intégrale de Lebesgue étend la notion de fonction puisque la bonne notion est celle de "fonction définie presque partout". Mais elle permet de construire de "bons" ensembles de fonctions, où chaque fonction a une "longueur" (une norme) et où les suites de Cauchy convergent (espaces complets).

* Rappelons qu'une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E est une application de E dans $[0,+\infty[$ de sorte que

$$(27)\qquad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad (x \in E)$$

$$(28)\qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| \;,\quad x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

(29) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|, \quad x\in E, \ y\in E$

et la relation (29) est la bonne généralisation de l'inégalité triangulaire comme pour la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et le module pour les nombres complexes.

(ex) Si $\int_\Omega |f|\,dx < \infty$, on pose $\|f\|_1 = \int_\Omega |f|\,dx$. on dit que $f\in L^1(\Omega)$ et nous avons la propriété

(Prop) $(L^1(\Omega), \| \ \|_1)$ est un espace normé.

- La preuve est laissée au lecteur. C'est un exercice sur l'intégrale de Lebesgue (pour montrer (27))

- Nous introduisons un autre espace fonctionnel, celui des fonctions mesurables essentiellement bornées.

(def) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On pose

$$(30)\begin{cases} L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \ \exists C \geq 0, \\ \qquad \text{pp}(x\in\Omega), \ |f(x)| \leq C \} \end{cases}$$

On pose ensuite

$$(31) \quad \|f\|_\infty = \inf\{C\geq 0, \ \text{pp}(x\in\Omega), \ |f(x)|\leq C\}.$$

* On remarque qu'on a

$$(32) \quad |f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \text{pp}(x\in\Omega).$$

Prop L'espace $L^\infty(\Omega)$ défini en (30) (31) est un espace normé.

- Le seul point à démontrer est l'inégalité triangulaire (29)
  Soit f et $g \in L^\infty(\Omega)$ alors, compte tenu de (32), $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ et $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pp. Donc $|f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pp, donc $f+g \in L^\infty$ et $L^\infty(\Omega)$ est bien stable par l'addition. Le nombre $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ majore pp $\{|f(x)| + |g(x)|\}$, il est donc plus grand que la borne inférieure de cet ensemble de majorants. Donc $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, ce qui montre la propriété. $\square$

- Espaces $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

def Soit p / $1 < p < \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est formé des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $f^p \in L^1(\Omega)$. On pose

$$(33) \quad \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p}$$

def Exposant conjugué

Pour p tq $1 \leq p \leq \infty$, l'exposant conjugué $q \in [1, +\infty]$ est défini par

$$(34) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

L'exposant conjugué de 1 vaut ∞, celui de l'∞ vaut 1. Sinon (34) est à interpréter entre nombres réels classiques.

(Th) Inégalité de Hölder.

Soit $p \geqslant 1$ et q défini en (34) son exposant conjugué. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors le produit fg appartient à $L^1(\Omega)$ et on a

(35) $\quad \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

• La preuve est facile si $p = 1$ ou $p = \infty$. Si $p = 1$ (pour fixer les idées), $g \in L^\infty(\Omega)$ et
$|f(x)\, g(x)| \leqslant \|g\|_\infty |f(x)|$
compte tenu de (32). Donc $fg \in L^1$ et (35) en résulte par une simple intégration.

• Si $1 < p < \infty$, on a d'abord l'inégalité suivante entre réels > 0 :

(36) $\quad ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \quad a > 0, b > 0, 1 < p < \infty.$

La preuve de ce lemme résulte de la concavité de la fonction logarithme :

(37) $\log((1-\theta)x + \theta y) \geqslant (1-\theta) \log x + \theta \log y, \quad x > 0,\ y > 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$

avec $y = a^p$, $x = b^q$, $\theta = \frac{1}{p}$, donc $1-\theta = \frac{1}{q}$, on déduit de (37) :

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log(ab),$$

qui est une réécriture de la relation (36).

* On déduit de (36) :

$$|f(x)\, g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

et en intégrant cette relation sur Ω, on en déduit (puisque $f \in L^p$ et $g \in L^q$) que $fg \in L^1(\Omega)$. Par ailleurs, cette inégalité passe aux intégrales :

$$(38) \quad \|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q.$$

Ici intervient une finesse. On introduit $\lambda > 0$, on écrit (38) en remplaçant f par λf, puis on redivise par λ. Il vient

$$(39) \quad \|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p}\lambda^{p-1}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\lambda}\|g\|_q^q.$$

On fixe λ de façon à minimiser le membre de droite de (39), i.e. de sorte que

$$\frac{p-1}{p}\lambda^{p-2}\|f\|_p^p - \frac{1}{q\lambda^2}\|g\|_q^q = 0.$$

Or $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Donc cette relation peut s'écrire $\lambda^p = \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}$. On reporte cette valeur particulière dans (39) et on a :

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{\lambda p}\|g\|_q^q + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q = \frac{1}{\lambda}\|g\|_q^q \quad cf(34)$$

$$\leq \|f\|_p \|g\|_q^{q-q/p} = \|f\|_p\|g\|_q$$

car $q - q/p = q\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{q}{q} = 1$.

La relation (35) est démontrée et ce théorème est établi. $\square$

- L'inégalité de Hölder est utile en soi ; c'est aussi le point clef pour établir l'inégalité triangulaire

Th **Minkowski**

Soit p, $1<p<\infty$. Si $f, g \in L^p(\Omega)$, alors $f+g \in L^p(\Omega)$ et l'on a

(40) $\quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

- La preuve consiste d'abord à remarquer que si $p>1$ la fonction $[0,+\infty[\ni y \mapsto y^p \in \mathbb{R}$ est convexe (la fonction est au dessus de sa corde). Donc

$$\left|\left(\frac{1}{2}(|f|+|g|)(x)\right)\right|^p \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p$$

D'où $|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$

et $f+g \in L^p(\Omega)$ par intégration.

* On a par ailleurs

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f+g|^p dx$$
$$= \int_\Omega |f+g|^{p-1} (|f+g|) dx$$
$$\leq \int_\Omega |f+g|^{p-1} (|f|+|g|) dx$$
$$\leq \int_\Omega |f+g|^{p-1} |f| dx + \int_\Omega |f+g|^{p-1} |g| dx.$$

La remarque importante est que $|f+g|^{p-1} \in L^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. En effet, $(p-1)q = p(1-\frac{1}{p})q = p$

Donc l'inégalité de Hölder s'écrit dans ce cas

$$\int_\Omega |f+g|^{p-1} |g| dx \leq \| |f+g|^{p-1} \|_q \|g\|_p$$

or $\| |f+g|^{p-1} \|_q^q = \|f+g\|_p^p$.

Donc $\| |f+g|^{p-1} \|_q = \|f+g\|_p^{p/q} = \|f+g\|_p^{p-1}$

* Il vient alors

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

et l'inégalité (40) en résulte par division par $\|f+g\|_p^{p-1}$. $\square$

AMI, CNAM, Cours (10), Complément.

Autour de l'intégration par parties

F. Dubois, 15 déc 2010.

- Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ son adhérence et $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ sa frontière, qu'on suppose régulière. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ une fonction régulière définie sur $\overline{\Omega}$. On note $n(x)$ la normale extérieure (unitaire) à Ω pour $x \in \partial\Omega$, de composantes n_j $(1 \leq j \leq n)$. On a alors la formule d'intégration par parties

$$(1) \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f\, n_j\, d\gamma$$

où $d\gamma$ désigne l'élément $(n-1)$ dimensionnel sur la frontière $\partial\Omega$.

- En posant $f = uv$ et en utilisant la règle de Leibniz pour la dérivation d'un produit, on c'est à dire

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot v + u \frac{\partial v}{\partial x_j},$$

on tire de (1) une forme usuelle de la formule d'intégration par parties :

(3) $$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_j\, d\gamma$$

- Soit $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs sur $\overline{\Omega}$ qu'on suppose de classe $\mathcal{C}^1$. En prenant $u = \varphi_j$, j^o composante de ce champ, on peut réécrire la relation (3) sous la forme

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} v\, dx = -\int_\Omega \varphi_j \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_{\partial\Omega} (\varphi_j n_j) v\, d\gamma$$

On somme la relation précédente pour j de 1 à n, en introduisant les notations

(4) $$\operatorname{div}\varphi = \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}$$

(5) $$\nabla v = \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} e_j$$ (e_j base canonique de $\mathbb{R}^n$)

(6) $$\varphi \cdot n = \sum_j \varphi_j n_j.$$

On a alors

(7) $$\int_\Omega \operatorname{div}\varphi\, v\, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} (\varphi\cdot n) v\, d\gamma$$

- On suppose maintenant que φ est lui-même le gradient d'un champ scalaire ψ, disons de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{\Omega}$: $\varphi_j = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}$. On a alors

(8) $\quad \operatorname{div}(\nabla \psi) = \Delta \psi$

(9) $\quad \sum_j \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} \cdot n_j = \dfrac{\partial \psi}{\partial n}$.

et la relation (7) s'écrit dans ce cas

(10) $\quad \displaystyle\int_\Omega \Delta \psi \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla \psi \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \dfrac{\partial \psi}{\partial n} v \, d\gamma$

- Dans le cas où $n=3$, on introduit le tenseur ε_{ijk} complètement antisymétrique d'ordre 3 : $\varepsilon_{ijk} = 1$ si (i,j,k) est une permutation paire de $(1,2,3)$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ si c'est une permutation impaire de $(1,2,3)$ et $\varepsilon_{ijk} = 0$ dans les autres cas. Le produit vectoriel de deux vecteurs u et v s'écrit, pour sa i^e composante

(11) $\quad u \times v \big|_i = \varepsilon_{ijk} \; u_j \, v_k$

avec sommation implicite sur les indices j et k. Le produit mixte de trois vecteurs u, v, w est un cousin du précédent :

(12) $\quad (u, v, w) = \varepsilon_{ijk} \, u_i \, v_j \, w_k$,

avec la encore, sommation sur les indices répétés.
On a bien entendu

(13) $\quad (u \times v) \cdot w = (u, v, w)$.

Le rotationnel d'un champ $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ a sa composante n° i qui s'écrit

(14) $$\mathrm{rot}(\varphi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \equiv \varepsilon_{ijk} \partial_j \varphi_k .$$

- On a alors une nouvelle formule d'intégration par parties, "avec les rotationnels" :

(15) $$\int_\Omega \psi \cdot \mathrm{rot}\,\varphi \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\psi \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} (\psi, n, \varphi) \, d\gamma .$$

La preuve de cette relation repose sur la relation (3) et la définition (14) du rotationnel :

$$\int_\Omega \psi \cdot \mathrm{rot}\,\varphi \, dx = \int_\Omega \psi_i \, \varepsilon_{ijk} \, \partial_j \varphi_k \, dx$$

$$= \varepsilon_{ijk} \Big[- \int_\Omega (\partial_j \psi_i) \, \varphi_k \, dx + \int_{\partial\Omega} \psi_i \, n_j \, \varphi_k \, d\gamma \Big]$$

$$= -\varepsilon_{kij} \int_\Omega (\partial_j \psi_i) \, \varphi_k \, dx + \int_{\partial\Omega} (\psi, n, \varphi) \, d\gamma$$

compte tenu de l'invariance cyclique du tenseur ε et de la définition (12) du produit mixte.
Compte tenu du changement de signe de

ε par permutation de deux indices, il vient

$$\int_\Omega \psi \cdot \mathrm{rot}\,\varphi \, dx = \int_\Omega \left(\varepsilon_{kji} \, \partial_j \psi_i \right) \varphi_k \, dx + \int_{\partial\Omega} (\psi, n, \varphi) \, d\gamma$$

$$= \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\psi)_k \, \varphi_k \, dx + \int_{\partial\Omega} (\psi, n, \varphi) \, d\gamma$$

ce qui établit la relation (15) compte tenu de la convention de sommation des indices répétés. $\square$

Dubois

Corrections de quelques coquilles le 5 juin 2011.

AM I

Ch 11 — Quelques applications classiques

• Calcul d'un produit de convolution.

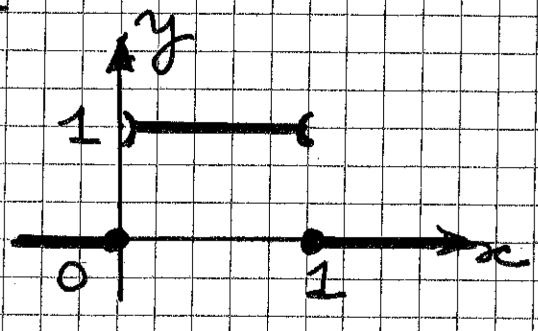

Figure 1.

Soit $f=\chi_{]0,1[}$. Le calcul de $g=f*f$ n'offre pas de difficulté. On a

(1) $(f*f)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,f(y)\,dy$

et f est nulle en dehors de son support $]0,1[$. On a

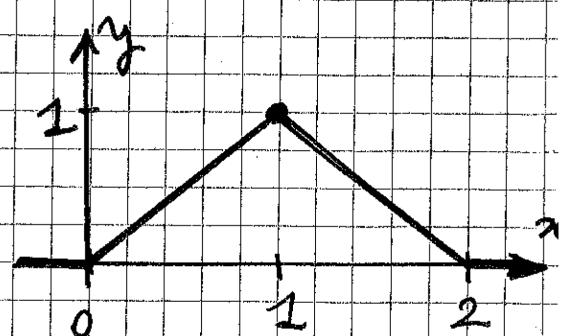

Figure 2

(2) $(f*f)(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

ainsi qu'illustré Figure 2.

* En effet, l'intégrale au membre de droite de (1) est à prendre de 0 à 1. Or si $x\le 0$ et $0\le y\le 1$, $-1\le x-y\le 0$ et le terme en $f(x-y)$ est nul donc l'intégrale correspondante est nulle. De même pour $x\ge 2$, on a $x-1\ge 1$ et $1\le x-1\le x-y$ si $0\le y\le 1$ et le terme $f(x-y)$ annule le produit à intégrer au membre de droite de (1). Pour $0\le x\le 1$,

on a $x-1 \leq 0 \leq x-y \leq x \leq 1$ si $0 \leq y \leq 1$,
donc $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, f(y)\, dy = \int_0^1 f(x-y)\, dy$

$$= \int_{x-1}^{x} f(z)\, dz = \int_0^x f(z)\, dz = x.$$

Pour $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1$, on a $0 \leq x-1 \leq x-y \leq 1 \leq x$ et $(f*f)(x) = \int_{x-1}^{1} dz = 1-(x-1) = 2-x$, ce qui achève de démontrer la relation (2).

- on remarque que si f est discontinue, la convolée $g = f*f$ est <u>continue</u> (voir la figure 2) ; d'où cette propriété de la <u>convolution</u> (que nous n'avons pas le temps de développer dans le cadre de ce cours) qu'elle <u>régularise</u>.

* on peut poursuivre le calcul et évaluer $p = f*f*f = f*g = g*f$; au passage, on remarque que la convolution définit une loi de composition <u>associative</u> [$f*(g*h) = (f*g)*h$ en toute généralité] et <u>commutative</u> [$f*g = g*f$ en toute généralité]. Nous pourrions démontrer ces propriétés mais les laissons, faute de temps, en exercice au lecteur !

* A partir de la remarque que l'intégration après multiplication par $f(y)$ force à introduire la condition $0 \leq y \leq 1$, on a

$$p(x) = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy = \int_0^1 g(x-y)\, dy$$
$$= \int_{x-1}^{x} g(z)\, dz$$

on a $x-1 \leq z \leq x$ et $g(z) \neq 0$ pour $0 \leq z \leq 2$

si $x \leq 0$, $g(t)$ est toujours nulle sur l'intervalle $[x-1, x]$ et $p(x) = 0$; de même si $x - 1 \geq 2$ (i.e. $x \geq 3$).
Reste à étudier le cas où $0 \leq x \leq 3$. On a sans difficulté conceptuelle (mais après quelques calculs d'intégrales laissés au lecteur!):

$$(3) \quad p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(3-x)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

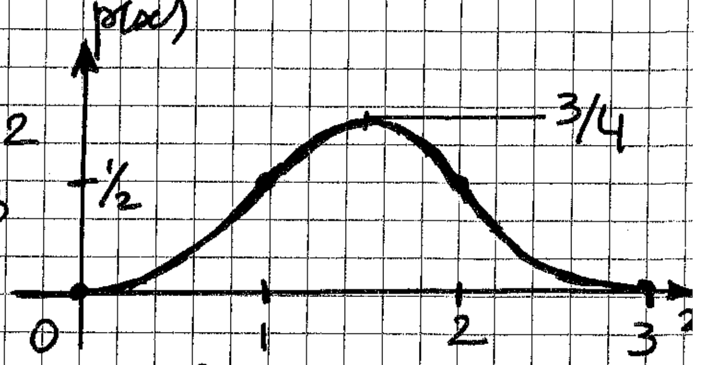

Figure 3

On remarque que p est continue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais on a même mieux puisque sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$; il suffit de le vérifier en $x = 0$ et $x = 3$ (c'est facile car la dérivée est nulle dans ces cas) puis en $x = 1$: $p'(1) = 1$ avec la formule pour $0 < x < 1$ et $p'(1) = -2 + 3 = 1$ avec la formule valable pour $1 < x < 2$. Enfin en $x = 2$, ce qui ne pose pas de nouvelle difficulté. On a donc $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, ce qui illustre une nouvelle fois l'effet régularisant de la convolution.

- La fonction p est dérivable; mais g est "presque" dérivable puisque g' a un sens comme fonction discontinue. Nous avons $p = f * g$ et allons vérifier que $p' = f * g'$; quand on dérive un produit de convolution, il suffit de dériver l'un des facteurs!

Le calcul de $(f*g')(x) = \int_{x-1}^{x} g'(t)\,dt = g(x) - g(x-1)$ n'offre pas de difficulté. Si $x \leq 0$ ou $x-1 \geq 2$ (c'est à dire $x \geq 3$) on a clairement $(f*g')(x) = 0$.
Si $0 \leq x \leq 1$, $x-1 \leq 0$ et $g(x-1) = 0$, $g(x) = x$, $(f*g')(x) =$
Si $1 \leq x \leq 2$, alors $0 \leq x-1 \leq 1 \leq x \leq 2$, $g(x) = 2-x$ et $g(x-1) = x$ donc $(f*g')(x) = 2-x-(x-1) = 3-2x$.
Enfin si $2 \leq x \leq 3$, $1 \leq x-1 \leq 2 \leq x$ donc $g(x) = 0$ et $g(x-1) = 2-(x-1)$ donc $(f*g')(x) = -(3-x) = x-3$. Si on dérive l'expression (3) relativement à x, on retrouve sans difficulté le résultat précédent. Nous avons retrouvé dans ce cas particulier la règle générale de dérivation d'un produit de convolution : si g' existe, alors $\frac{d}{dx}(f*g) = f*g'$.

- Introduction aux problèmes elliptiques

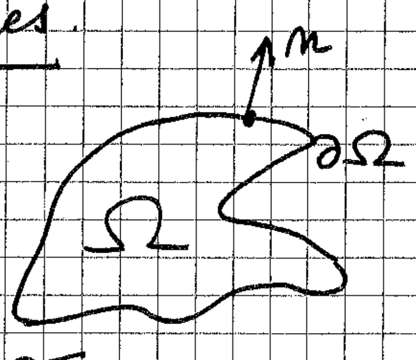

Figure 4

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (pour fixer les idées), de frontière $\partial\Omega$ régulière.
On note n la normale extérieure à Ω le long de $\partial\Omega$.
Si $\overline{\Omega} \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}$ est une fonction régulière définie sur Ω jusqu'au bord ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), on note ∇v le vecteur formé des dérivées partielles

(4) $\quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{1 \leq j \leq n}$, $\nabla v \in \mathbb{R}^n$

et $\frac{\partial v}{\partial n} = dv \cdot n = \nabla v \cdot n \equiv \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j$ la dérivée normale le long de la frontière :

(5) $$\frac{\partial v}{\partial n} = \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j \,, \quad x \in \partial\Omega .$$

Si w est une fonction régulière définie sur $\overline{\Omega}$, on a la formule de Green suivante, si v est assez régulière :

(6) $$-\int_\Omega \Delta v \, w \, dx = \int_\Omega \nabla v . \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} w \, d\gamma$$

* La preuve de la relation (6) consiste à écrire la relation fondamentale d'intégration par parties :

(7) $$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \psi \, dx = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} \varphi n_j \psi \, d\gamma .$$

on applique cette relation avec $\varphi = w$ et $\psi = \frac{\partial v}{\partial x_j}$. Puis on somme sur j. Il vient

$$\sum_j \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega w \sum_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} dx + \int_{\partial\Omega} w \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j \, d\gamma$$

on en déduit $\int_\Omega \nabla w . \nabla v \, dx = -\int_\Omega w (\Delta v) \, dx + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial v}{\partial n} d\gamma$, ce qui établit la relation (7).

• Si on se donne une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (régulière pour fixer les idées, mais cette hypothèse n'est pas absolument nécessaire), on appelle solution du problème de Dirichlet pour le laplacien une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

(8) $$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

alors une telle fonction est nécessairement <u>unique</u>. En effet, si u <u>et</u> v sont deux solutions distinctes du problème (8), on forme leur différence $\varphi \equiv u - v$ qui vérifie alors $-\Delta\varphi = 0$ dans Ω et $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. On utilise la relation (6) avec $v = w = \varphi$. Il vient : $0 = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \varphi \, d\gamma$.

Le terme de bord $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \varphi \, d\gamma$ est <u>nul</u> car φ est nul sur le bord $\partial\Omega$ (condition de Dirichlet homogène). On en déduit $\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = 0$ donc $\nabla\varphi = 0$ presque partout donc sur tout Ω si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour fixer les idées. Donc φ est constante sur toute composante connexe de Ω ; cette constante est nulle car φ est nulle au bord. L'unicité est établie.

- On peut dans le cas monodimensionnel ($\Omega =]0,1[$) expliciter une solution du problème (8). On introduit la <u>fonction de Green</u> suivante

$$(9) \quad G(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & \xi \leq x \\ (1-\xi)\,x, & \xi \geq x \end{cases}$$

pour $x, \xi \in [0,1]$. Pour $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, on pose

$$(10) \quad u(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi .$$

Alors cette fonction satisfait à $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$ sur $]0,1[$, $u = 0$ en $x = 0$ et $x = 1$ (sur $\partial\Omega$).

En effet, on a

$$(11) \qquad u(x) = (1-x)\int_0^x \xi f(\xi)\,d\xi + x\int_x^1 (1-\xi) f(\xi)\,d\xi .$$

Si $x=0$, on a clairement $u(0)=0$ et pour $x=1$, on a $u(1)$ de façon analogue. Si f est continue sur $[0,1]$ pour fixer les idées, on a

$$\frac{du}{dx} = -\int_0^x \xi f(\xi)\,d\xi + (1-x)x f(x) + \int_x^1 (1-\xi) f(\xi)\,d\xi - x(1-x) f$$

Donc $\dfrac{d^2u}{dx^2} = -x f(x) - (1-x) f(x) = -f(x)$ et la propriété est établie.

- Calcul d'une différentielle classique.

Nous avons vu les dérivées partielles de fonctions de deux variables réelles et les différentielles associées. On a typiquement $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Dans le cas où $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $(x,y) = \sum_j x_j y_j$ le produit scalaire. Puis on introduit une matrice A à n lignes et n colonnes symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$(12) \qquad J(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (b,x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors la dérivée de J dans la direction h et au point x peut s'écrire

$$(13) \qquad dJ(x)\cdot h = (Ax-b, h), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Pour effectuer ce calcul pratique, on peut se ramener à la définition d'une application différentiable, développer $J(x+h)$ en fonction de h et identifier $dJ(x).h$ au terme d'ordre 1 relativement à h. Comme J défini à la relation (12) est polynomiale, ce calcul ne présente pas de difficulté :

$$J(x+h) = \frac{1}{2}(x+h, A(x+h)) - (b, x+h)$$

$$= \frac{1}{2}(x, Ax) - (b, x) + \frac{1}{2}(h, Ax) + \frac{1}{2}(x, Ah) - (b, h) + \frac{1}{2}(h, Ah)$$

$$= J(x) + \frac{1}{2}(Ax + A^t x, h) - (b, h) + \frac{1}{2}(h, Ah)$$

Comme la matrice A est symétrique, $A^t = A$ et la relation (13) se déduit immédiatement du calcul précédent.

* On peut aussi dériver directement la fonction J dans la direction h. Pour cela, on introduit une variable réelle θ auxiliaire, et on pose

(14) $\qquad \varphi(\theta) = J(x+\theta h).$

Alors $\theta \mapsto \varphi(\theta)$ est une fonction numérique de variable réelle, dérivable en $\theta = 0$ si et seulement si J est dérivable au point x dans la direction h :

(15) $\qquad \varphi'(0) = dJ(x).h$

Pour calculer en pratique $\varphi'(0)$, le plus simple est de développer $\varphi(\theta)$ en puissances croissantes de θ et d'identifier le terme d'ordre 1. On a ici

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\left(x+\theta h, A(x+\theta h)\right) - (b, x+\theta h)$$
$$= \varphi(0) + \frac{1}{2}\theta(h, Ax) + \frac{1}{2}(x, A(\theta h)) - \theta(b, h) + \frac{1}{2}\theta^2(h, Ah)$$
$$= \varphi(0) + \theta\left(\frac{1}{2}(A+A^t).x - bx, h\right) + \frac{\theta^2}{2}(h, Ah)$$

et le résultat s'obtient comme plus haut puisque la matrice A est symétrique.

- Une variante d'un calcul classique.

On pose $\tilde{J}(x) = \frac{1}{8}(x, Ax)^3$ et on se propose de calculer $d\tilde{J}(x) \cdot h$ pour x et h arbitraires dans $\mathbb{R}^n$. On remarque simplement que $\tilde{J}$ est la composée de $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto J(x) \in \mathbb{R}$ (avec $b=0$) et de la fonction $\mathbb{R} \ni y \mapsto \psi(y) \equiv y^3 \in \mathbb{R}$: $\tilde{J}(x) = \psi(J(x))$. Alors la différentielle cherchée s'obtient par la règle de composition :

$$d\tilde{J}(x)\cdot h = [d(\psi \circ J)](x)\cdot h = (d\psi)(J(x)) \cdot dJ(x)\cdot h$$
$$= \psi'(J(x))\,dJ(x)\cdot h = 3[J(x)]^2\,(Ax, h)$$
$$= \frac{3}{4}(x, Ax)^2 (Ax, h).$$

Le calcul "élémentaire" avec une fonction numérique de variable réelle telle que (14) introduit un polynome en θ de degré 6 qui peut compliquer les calculs si on écrit tous les termes ! Mais laissons au lecteur le soin de vérifier le calcul précédent à l'aide de cette approche.

- <u>Dériver des fonctionnelles.</u>

L'étape suivante consiste à travailler avec des fonctions définies sur des espaces de dimension infinie, donc des espaces de fonctions typiquement. On parle alors de fonctionnelles.

* Dans l'espace $L^2(\Omega)$, le produit scalaire (u,v) de deux fonctions est défini par

$$(16) \quad (u,v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

La norme associée $\|u\|_2$ est donnée par

$$(17) \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u,u)} = \left\{ \int_\Omega |u|^2(x)\, dx \right\}^{1/2}.$$

Elle définit une fonctionnelle $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$
$L^2(\Omega) \ni u \mapsto J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_2^2 \in \mathbb{R}$ qui est une fonction dérivable de u. Que vaut $dJ(u)\cdot h$?

Le plus simple ici est d'adopter l'approche donnée par la relation (14). On pose

$$\varphi(\theta) = J(x+\theta h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x)+\theta h(x)|^2 dx$$

car $\Omega \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$ et $\Omega \ni x \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions de la variable $x \in \Omega$ et θ est un nombre réel. On a alors :

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (u(x)+\theta h(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left((u(x))^2 + 2\theta\, u(x) h(x) + \theta^2 (h(x))^2\right) dx \\ &= \varphi(0) + \theta \int_\Omega u(x) h(x)\, dx + \frac{\theta^2}{2}\int_\Omega |h(x)|^2 dx \\ &= \varphi(0) + \theta\, (u,h) + \frac{\theta^2}{2} \|h\|_2^2 .\end{aligned}$$

Le quotient $\dfrac{\varphi(\theta)-\varphi(0)}{\theta}$ tend clairement vers (u,h) si θ tend vers zéro, ce qui montre que $dJ(x)\bullet h = (u,h)$.

* Nous laissons au lecteur le soin de calculer la différentielle de l'application $L^3(\Omega) \ni u \mapsto \frac{1}{3}\int_\Omega u^3 dx \in \mathbb{R}$, en prenant soin de vérifier que les diverses intégrales introduites ont bien un sens !

Dubois
23 janvier 2010.

Correction de quelques coquilles, suite aux remarques proposées par Claude Dunand, auditeur au CNAM en 2010-2011. 05 juin 2011
Dubois.