le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 03
Introduction à la topologie générale

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 3
Introduction à la topologie générale *

- Distance et norme
- Ouverts et fermés
- Fonctions continues

---

* François Dubois, 2009, édition septembre 2015, 19 pages.

AMI 3 16 oct 2013.

Introduction à la topologie générale

1) Distance et norme
2) ouverts et fermés
3) fonctions continues.

1 Distance et Norme

def Espace métrique

on se donne un ensemble E. Une distance d sur E est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

(1) $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in E$ [positivité]

(2) $d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x,y \in E$ [symétrie]

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x,y,z \in E$ [inégalité triangulaire]

(4) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. [séparation]

Le couple (E,d) s'appelle alors un espace métrique.

(ex) $\mathbb{R}$, avec $d(x,y)=|x-y|$ (valeur absolue)
ou bien $\mathbb{C}$, avec $d(z,\zeta)=|z-\zeta|$ (module).

Cet exemple est en fait généralisable.

(def) Norme sur un espace vectoriel.

On se donne E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une norme $\|\cdot\|$ sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que

(5) $\|x\|\geq 0$, $\forall x\in E$ [positivité]

(6) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ [homogénéité]

(7) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ [inégalité triangulaire]

(8) $\|x\|=0 \Longrightarrow x=0$ [séparation].

Prop ① Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\|$ une norme sur E. On pose

(9) $d(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in E$.

Alors d est une distance sur E.

Preuve de la proposition ①

La vérification des quatre axiomes des distances

(1) à (4) à partir de (6) à (8) est facile. La positivité (1) est claire à partir de (5), la symétrie (2) résulte de l'homogénéité avec $\lambda = -1$ et de la relation $|-1| = 1$. L'inégalité triangulaire (3) s'écrit

$$d(x,y) = \| x-y \| = \| (x-z) + (z-y) \|$$
$$\leqslant \|x-z\| + \|z-y\| \qquad \text{cf } (7)$$
$$= d(x,z) + d(y,z) \qquad \text{d'où } (3).$$

Enfin, si $d(x,y)=0$, $\|x-y\|=0$ c'est à dire [cf (8)] $x-y=0$, soit $x=y$, ce qui montre la relation (4).

(ex) n entier $\geqslant 0$, $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, on pose

(10) $\quad \|x\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty$

(11) $\quad \|x\|_\infty = \sup_{j=1,\ldots,n} |x_j|.$

Prop ② <u>Normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.</u>

Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors la norme $\|\cdot\|_p$ définie en (10) ou (11) est effectivement une norme (au sens des axiomes (5) à (8)).

Preuve de la proposition ②

Les relations (5), (6) et (8) sont claires [exercice (?!) laissé au lecteur !]. Pour l'inégalité triangulaire (7), elle est triviale pour $p=1$, facile pour $p=\infty$, classique pour $p=2$, difficile pour $p\neq 1,2,\infty$. Elle porte dans ce cas le nom de Minkowski (1864-1909) et est proposée en exercice.

Pour $p=1$, on a

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j|+|y_j|\right) \qquad \text{inégalité triangulaire dans } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}. \\ &= \|x\|_1+\|y\|_1,\end{aligned}$$

d'où le résultat. Pour $p=\infty$, on a pour tout j

$$|x_j+y_j| \leqslant |x_j|+|y_j| \leqslant \|x\|_\infty+\|y\|_\infty .$$

Donc le majorant $\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$ est supérieur au plus petit majorant $\sup_j |x_j+y_j| = \|x+y\|_\infty$ ce qui montre (7) pour $p=\infty$.

Pour $p=2$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(12) \qquad \left|\sum_{j=1}^{n} x_j \, y_j\right| \leqslant \|x\|_2 \; \|y\|_2 .$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \overline{x_j} + x_j \overline{y_j} + y_j \overline{x_j} + y_j \overline{y_j} \right) \\
&\leqslant \|x\|_2^2 + \left|\sum_j x_j \overline{y_j}\right| + \left|\sum_j \overline{x_j} y_j\right| + \|y\|_2^2 \\
&\leqslant \|x\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 \quad (\text{cf } (12)) \\
&= \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2
\end{aligned}$$

et l'inégalité (7) avec $p=2$ en résulte. □

Prop (3) Equivalence des normes.

Soit n fixé et $p \geqslant 1$. Les normes $\|\cdot\|_p$ sont équivalentes à la norme $\|\cdot\|_\infty$ au sens suivant :

$$(13) \quad \exists \alpha, \beta > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \beta \|x\|_\infty .$$

On a $\alpha = 1$, $\beta = n^{1/p}$.

Preuve de la proposition (3).

On a bien sur $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ pour tout $p \geq 1$, ce qui établit la première inégalité de (13) avec $\alpha = 1$. On a aussi $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ pour tout j, d'où $\|x\|_p^p \leq n \|x\|_\infty^p$ et $\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$, ce qui montre la fin de la proposition. $\square$

(2) Ouverts et fermés.

On se place dans un espace métrique (E,d).

(def) Boule ouverte

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. La boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ est l'ensemble des $y \in E$ tels que la distance à x est strictement inférieure à ε:

$$(14) \qquad B(x,\varepsilon) = \{y \in E,\ d(x,y) < \varepsilon\}.$$

(ex) L'intervalle $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ (avec $a<b$ deux réels) est une boule ouverte de centre $\frac{a+b}{2}$ et de "rayon" $\frac{b-a}{2}$.

(def) ouvert

Un ouvert $O \subset E$ est une réunion quelconque de boules ouverts :

(15) $$\theta = \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon_i),$$

où l'ensemble des indices n'est pas précisé.

- Si $I = \phi$, $\theta = \phi$ qui est donc ouvert. De plus, comme on a l'égalité (presque évidente !)

(16) $$E = \bigcup_{x \in E} B(x, 1),$$

l'espace de référence E lui-même est ouvert.

(a) $a \in \mathbb{R}$, $I =]a, +\infty[$ est ouvert. En effet, $]a, +\infty[= \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]a, k + a[$

Prop (4) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.

Preuve de la proposition (4)

Si $(\theta^j)_{j \in J}$ est une famille d'ouverts, il existe $x_i^j \in E$ et $\varepsilon_i^j > 0$ de sorte que

$\theta^j = \bigcup_{i \in I_j} B(x_i^j, \varepsilon_i^j)$. Alors $\bigcup_{j \in J} \theta^j$ est

égal à la réunion $\bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} B(x_i^j, \varepsilon_i^j)$

qui est clairement une réunion de boules ouvertes. $\square$

Prop 5 Un ouvert non vide est <u>voisinage de chacun de ses points</u>:

$$\forall x \in \mathcal{O}, \ \exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}.$$

<u>Preuve de la proposition 5.</u>

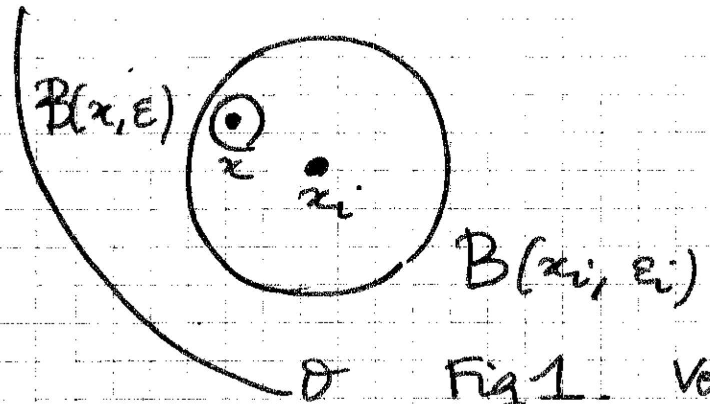
Soit $x \in \mathcal{O}$. Alors $\exists i \in I$, $\exists \varepsilon_i > 0$, $x \in B(x_i, \varepsilon_i)$, c'est à dire $d(x, x_i) < \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}(\varepsilon_i - d(x, x_i))$$

Alors $B(x, \varepsilon) \subset B(x_i, \varepsilon_i) \subset \mathcal{O}$. En effet, si $y \in B(x, \varepsilon)$, $d(x, y) < \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} d(y, x_i) &\leqslant d(y, x) + d(x, x_i) \\ &< \varepsilon + d(x, x_i) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon_i - d(x, x_i)}{2} + d(x, x_i) \\ &= \frac{\varepsilon_i + d(x, x_i)}{2} < \varepsilon_i \end{aligned}$$

et $y \in B(x_i, \varepsilon_i)$ comme annoncé. $\square$



<u>Fig 1</u> Voisinage de $x \in \mathcal{O}$

Prop 6 [réciproque] Si une partie A de E est voisinage de chacun de ses points, alors c'est un ouvert de E.

Notons que "A voisinage de chacun de ses points" signifie

(16) $\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0, \quad B(x, \varepsilon_x) \subset A.$

<u>Preuve de la proposition 6</u>

On écrit simplement $A = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x)$.

Prop 7 Une intersection finie d'ouverts est ouverte.

On remarque d'abord que $]0,1[$ et $]1,2[$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$ et que leur intersection est <u>vide</u>. La proposition 7 n'a de sens que si $\emptyset$ est ouvert !

Preuve de la proposition ⑦.

Soit $(\mathcal{O}_j)_{j=1,N}$ une famille finie d'ouverts, et $A = \bigcap_{j=1,\dots,N} \mathcal{O}_j$. Ou bien $A = \emptyset$ et il est ouvert comme observé plus haut, ou bien $A \neq \emptyset$.

Soit $x \in A$. Montrons qu'il existe $\varepsilon_x > 0$ de sorte que $B(x, \varepsilon_x) \subset A$. Pour tout $j = 1, \dots, N$, il existe $\varepsilon_j > 0$ de sorte que $B(x, \varepsilon_j) \subset \mathcal{O}_j$ puisque chaque ouvert $\mathcal{O}_j$ est voisinage de x. Soit $\varepsilon_x = \inf_{j=1,\dots,N} \varepsilon_j$. Alors $\varepsilon_x > 0$ car on a un nombre fini d'indices. Donc $B(x, \varepsilon_x) \subset \mathcal{O}_j$ pour tout j et $B(x, \varepsilon_x) \subset A$.

$\blacksquare$

• Attention!

$[0,1[$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $B(0, \varepsilon)$ n'est pas inclus dans $[0,1[$.

(def) Partie fermée d'un espace métrique (E,d).

Un fermé F est le complémentaire d'un ouvert. Une partie F de E est fermée si et seulement si il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de E de sorte que $F = \mathcal{O}^c \equiv E \setminus \mathcal{O} = \{y \in E, y \notin \mathcal{O}\}$.

(ex) ϕ et E sont des fermés de E car $\phi = E^c$, $E = \phi^c$ et E et ϕ sont des ouverts respectivement.

(ex) $a<b$ deux réels.

$]-\infty, a] =]a, +\infty[^c$ est ~~ouvert~~ fermé

$[a,b] = (]-\infty, a[\cup]b, +\infty[)^c$ est fermé.

- on remarque que ϕ et E sont <u>à la fois</u> ouverts et fermés. On rappelle la règle de calcul des complémentaires :

$$(17)\quad \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \;;\; \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c .$$

- Attention : les intervalles $[0,1[$ et $]0,1]$ ne sont ni ouverts, ni fermés.

Prop 8 Une intersection quelconque de fermés est fermée.

La preuve est une conséquence de la proposition 4 et de la relation (17). □

Prop 9 Une réunion finie de fermée est fermée.

En effet, il suffit de considérer la proposition 7 et la dualité (17). □

- Attention aux unions dénombrables de fermés :

$$\bigcup_{k\geq 1} \left[-1+\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right] = \left]-1, 1\right[$$

qui n'est pas fermé ... ainsi qu'à l'intersection dénombrable d'ouverts :

$$\bigcap_{k\geq 1} \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[= \{0\}$$ qui n'est pas voisinage de son unique point, donc n'est pas ouvert ...

Th 1 — Un fermé stabilise la limite

Soit F un fermé non vide de E, $u_k \in F$ une suite de F qui converge vers $l \in E$:

(18) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) \leq \varepsilon$.

Alors l appartient à F.

Preuve du théorème 1.

On se donne une suite $u_k \in F$ qui converge vers l. On montre que l'hypothèse $l \notin F$ conduit à une contradiction. En effet, si $l \notin F$, $l \in F^c$ qui est ouvert, donc voisinage de chacun de ses points et de l en particulier. Donc $\exists \varepsilon > 0, B(l, \varepsilon) \subset F^c$.

Compte tenu de (18), il existe N tel que $u_k \in B(l, \varepsilon)$ si $k \geq N$. On a alors à la fois $u_k \in B(l,\varepsilon) \subset F^c$ donc $u_k \notin F$ et $u_k \in F$ par hypothèse. D'où la contradiction et $l = \lim\limits_{k \to \infty} u_k \in F$. $\square$

- Le théorème (1) admet une réciproque dans certains espaces. Nous l'énonçons dans $\mathbb{R}^n$.

Th (2) Caractérisation des fermés.

Soit $E = \mathbb{R}^N$ (N entier ≥ 1), muni de la topologie associée à l'une quelconque des normes $\|\cdot\|_p$ (cf (10) et (11)). Soit $F \neq \emptyset$ une partie de E telle que pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ qui converge, la limite l appartient à F. Alors F est fermé.

(R) $]0,1]$ n'est pas fermé car $u_k = 1/k$ si $k \geq 1$ converge dans $\mathbb{R}$ et sa limite 0 n'appartient pas à $]0,1]$.

(déf) Adhérence

Soit $A \neq \emptyset$ une partie de l'espace métrique E. On pose

(19) $\Phi = \{F \subset E, F \text{ fermé}, A \subset F\}$,

l'ensemble des fermés qui contiennent A. Φ n'est pas vide (car $E \in \Phi$) et l'intersection

$$(20) \qquad \overline{A} \equiv \bigcap_{F \in \Phi} F$$

est fermée comme intersection de fermés ; c'est <u>le plus petit fermé contenant A</u>. <u>On</u> l'appelle <u>adhérence</u> de A et on le note $\overline{A}$.

(def) <u>Intérieur</u>.

Soit $A \neq \emptyset$ une partie de l'espace métrique E. On pose

(21) $\Omega = \{\theta \subset E, \theta \text{ ouvert}, \theta \subset A\}$,

ensemble des ouverts inclus dans A. On observe que Ω peut être vide [$A = \{0\} \subset \mathbb{R}$] ; mais l'union

$$(22) \qquad \mathring{A} \equiv \bigcup_{\theta \in \Omega} \theta$$

est toujours ouverte comme union [éventuellement vide !] d'ouverts ; c'est <u>le plus grand ouvert inclus dans A</u>. On le note $\mathring{A}$ et le nomme <u>intérieur</u> de A.

(déf) Frontière

(23) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

- Une partie A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$

(déf) Suite de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de E. Elle est dite de Cauchy si et seulement si

(24) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$.

Les termes de la suite sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang.

(déf) Espace complet

L'espace métrique (E, d) est complet si et seulement si toute suite de Cauchy converge dans E ; la relation (24) entraîne la relation (18) !

(3) Fonctions continues.

(def) Fonction continue entre deux espaces métriques.

On se donne deux espaces métriques (E,d) et (F,δ) et une application $f : E \to F$.
Soit $x \in E$. On dit que f est continue en x si et seulement si

(25) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x) f(y)) < \varepsilon$.

La fonction f est continue $E \to F$ si et seulement si elle est continue en tout point $x \in E$.

(def) Image réciproque.

Soient E et F deux ensembles et f une application $E \to F$. Soit $B \subset F$ une partie de F. On note $f^{-1}(B)$ et on appelle image réciproque de B par f l'ensemble

(26) $f^{-1}(B) = \{ x \in E, f(x) \subset B \}$

des $x \in E$ dont l'image par f appartient à B

(Prop) (10) Propriétés de l'image réciproque

(27) $f^{-1}(\bigcup_j B_j) = \bigcup_j f^{-1}(B_j)$

(28) $f^{-1}(\bigcap_j B_j) = \bigcap_j f^{-1}(B_j)$

(29) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

Preuve de la proposition (10)

On a $x \in f^{-1}(\bigcup_j B_j) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_j B_j$.

$\Leftrightarrow \exists j,\ f(x) \in B_j$

$\Leftrightarrow \exists j,\ x \in f^{-1}(B_j)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_j f^{-1}(B_j)$, d'où (27).

De façon analogue,

$x \in f^{-1}(\bigcap_j B_j) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_j B_j$.

$\Leftrightarrow \forall j,\ f(x) \in B_j$

$\Leftrightarrow \forall j,\ x \in f^{-1}(B_j)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_j f^{-1}(B_j)$, d'où (28).

Enfin, $x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c$

$\Leftrightarrow f(x) \notin B$

$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B))^c$, d'où (29). $\square$

Th ③ Un critère de continuité.

Soit f une application de (E,d) dans (F,δ). Elle est continue en tout point $x \in E$ si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E :

(30) $\forall \omega$ ouvert $\subset F$, $f^{-1}(\omega)$ est ouvert $\subset E$.

Preuve du Théorème ③.

- Soit f continue et ω un ouvert quelconque de F. Montrons que $f^{-1}(\omega)$ est ouvert. Si $f^{-1}(\omega) = \phi$, alors c'est un ouvert de E. Si $A = f^{-1}(\omega)$ n'est pas vide, montrons qu'il est voisinage de chacun de ses points.
  Soit $x \in A$. Donc $f(x) \in \omega$ qui est ouvert. Donc il existe une boule ouverte de centre $f(x)$ et de rayon $\varepsilon > 0$ incluse dans ω puisque ω est voisinage de chacun de ses points, donc de $f(x)$ en particulier. On a donc $B(f(x), \varepsilon) \subset \omega$ et si $z \in F$ satisfait à $\delta(z, f(x)) < \varepsilon$, alors $z \in \omega$. Comme f est continue au point x, on peut trouver $\eta > 0$ de sorte que si $y \in E$ satisfait à $d(x,y) < \eta$, alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$, c'est à dire $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, qu'on peut écrire

$f(y) \in \omega$ et $y \in f^{-1}(\omega)$. Ceci est vrai $\forall y \in B(x, \varepsilon)$, donc $B(x, \varepsilon) \subset f^{-1}(\omega)$ et on a trouvé un voisinage de x qui est inclus dans $f^{-1}(\omega)$. Donc $f^{-1}(\omega)$ est ouvert.

- On suppose maintenant que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E. Montrons que f est continue en tout point $x \in E$. Soit $\varepsilon > 0$; la boule $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de F. Son image réciproque $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est un ouvert de E qui contient x. Donc c'est un voisinage de x et $\exists \eta > 0$, $B(x, \eta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. En d'autres termes, si $y \in B(x, \eta)$, $y \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, c'est à dire $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, i.e. $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si $y \in E$ satisfait à $d(x, y) < \eta$, alors on a $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$, et la continuité (25) est établie.

$\square$

<u>Corollaire</u>. L'application f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

[exercice pour le lecteur]

Dubois

20 oct 2013

Corrections 09 octobre 2019.