le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 1 Suites et séries de nombres réels

• Suite géométrique

On se donne un nombre q. Un nombre réel *a priori*, mais l'essentiel de ce qui suit reste valable si q est un nombre complexe. Dans le cadre de ce cours, une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q satisfait à la condition initiale $u_0 = 1$ et à la relation d'itération $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout entier naturel n. On établit alors facilement par récurrence que $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $q = 1$, la suite géométrique est constante et si $q = -1$, elle est alternée.
Si $q > 1$, la suite géométrique $u_n = q^n$ tend vers $+\infty$ si n tend vers l'infini. Si $|q| < 1$, la suite géométrique tend vers zéro si n tend vers l'infini.

• Série associée à une suite

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque de nombres réels ou complexes. On forme la somme partielle des premiers termes de la suite : $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$ et de façon générale, $S_n = S_{n-1} + u_n$. On remarque qu'avec cette définition, la somme partielle S_n comporte $n+1$ termes. Avec ce procédé, on construit à partir de la suite initiale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles. Cette suite des sommes partielles définit la série associée à la suite u_n.

• Condition nécessaire de convergence d'une série numérique

On se donne une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série associée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = u_0$ et $S_n = S_{n-1} + u_n$ dès que n est un entier ≥ 1. Si S_n converge vers une limite finie, alors la suite initiale u_n tend vers zéro. Il suffit d'écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$.
Attention, cette condition nécessaire de convergence n'est pas suffisante, comme on le verra plus loin.

• Série géométrique

A partir de la suite géométrique $u_n = q^n$ on peut former la série associée. On a alors $S_n = n+1$ si $q = 1$ et $S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$.
Si $|q| < 1$, la série géométrique converge ; on a $S_n \longrightarrow \frac{1}{1-q}$ si l'entier n tend vers $+\infty$.
Dans le cas $q = \frac{1}{2}$ par exemple, on ajoute à chaque fois un terme deux fois plus petit que le précédent ; le résultat reste "fini", même si le nombre de termes est de plus en plus grand et se rapproche de plus en plus du nombre 2.
Ce cas particulier de la série géométrique nous incite à revenir à des considérations générales sur les nombres réels et les suites de nombres réels.

François Dubois, septembre 2019.

• Une propriété fondamentale des nombres réels.
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure : c'est le plus petit élément de l'ensemble de ses majorants. Soit $P \subset \mathbb{R}$ que l'on suppose non vide $(P \neq \emptyset)$ et majorée : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in P, x \leq A$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$, tels que d'une part M est un majorant de P: $\forall x \in P, x \leq M$ et d'autre part, M est le plus petit majorant de la partie P: si le nombre B est un majorant de P, alors il est plus grand que M: $\big(\forall x \in P, x \leq B\big) \Longrightarrow \big(M \leq B\big)$.
La borne supérieure d'une partie P non vide et majorée de $\mathbb{R}$ se note $\sup P$ ou $\sup(P)$.

• Suite croissante majorée de nombres réels.
On se donne une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Si elle est majorée, c'est à dire telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq A$ pour pour tout entier, alors elle est convergente ; il existe un (et un seul !) nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$. On laisse en exercice au lecteur le fait de démontrer que $\ell = \sup\big(\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}\big)$.
Exemple. La suite $u_0 = 0,\ u_1 = 0.3,\ u_2 = 0.33\,, \cdots,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k}$ est une suite croissante majorée qui converge vers $\frac{1}{3}$. C'est la somme des termes d'une progression géométrique dont on peut préciser la raison.

• Série à termes positifs
On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs : $u_n \geq 0$. Il y a deux éventualités pour le comportement de la série associée S_n telle que $S_0 = u_0$ et $S_n = S_{n-1} + u_n$. Ou bien l'ensemble $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré et la série converge. Ou bien l'ensemble $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré et la suite S_n des sommes partielles tend vers $+\infty$ si n tend vers l'infini.
Exemples. Si $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, la série associée converge.

• Critère de comparaison
On se donne deux suites positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout entier n. Si la série associée à v_n converge, alors la série associée à u_n converge. Si la série associée à u_n diverge, alors la série associée à v_n diverge.
A l'aide de ce critère de comparaison, on établit facilement (exercice !) que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ (pour $n \geq 1$) définit une série convergente.
En pratique, l'utilisation du critère de comparaison consiste à chercher la limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$, lorsque le comportement de la série (v_n) est connu. Comparer une suite u_n à la suite géométrique q^n pour étudier la convergence de la série associée est une première étape pour dégrossir le problème, comme d'Alembert et Cauchy l'avaient bien compris !

• Suite de Cauchy
Une suite de Cauchy est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont arbitrairement proches les uns des autres, à condition d'aller assez loin dans la suite :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,\, q \geq N,\ |x_p - x_q| < \varepsilon.$
Exemple : la suite des sommes partielles des inverses des factorielles $S_n \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est une suite de nombres rationnels qui est une suite de Cauchy.

• Toute suite convergente est de Cauchy
Si la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors c'est une suite de Cauchy.

• Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy est convergente.
On dit aussi que l'espace $\mathbb{R}$ est complet. La construction des nombres réels permet de "boucher les trous" laissés par les nombres rationnels.
Par exemple, la suite S_n des sommes partielles des inverses des factorielles est une suite de Cauchy de rationnels mais elle ne converge pas dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels [exercice !]. En revanche, elle est convergente dans $\mathbb{R}$ puisque c'est une suite de Cauchy. La somme de la série est nommée e, en hommage à Leonhard Euler (1707 - 1783). En d'autres termes, le nombre $\mathrm{e} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ est irrationnel.

• Convergence absolue
On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série à termes positifs de terme général $|u_n|$ est convergente.

• Une série de nombres réels absolument convergente est convergente
C'est une conséquence du fait que $\mathbb{R}$ est complet. Comme la série de terme général $|u_n|$ est convergente, elle est de Cauchy. Or, l'inégalité triangulaire montre que la valeur absolue du paquet de Cauchy $\sum_{k=p}^{p+m} u_k$ de la série u_n est majoré par le paquet de Cauchy $\sum_{k=p}^{p+m} |u_k|$ de la série $|u_n|$. Donc la série (u_n) définit une suite de Cauchy ; elle converge car $\mathbb{R}$ est complet.

• Extension au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes
Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est de Cauchy si elle satisfait un critère analogue à celui des suites réelles. On remplace simplement la valeur absolue $|\ |$ par le module (même notation !) qui est son extension naturelle aux nombres complexes :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ |z_p - z_q| < \varepsilon.$
L'ensemble des complexes est lui aussi complet : toute suite Cauchy de nombres complexes converge dans $\mathbb{C}$.
Une série u_n de nombres complexes est absolument convergente si la série des modules $|u_n|$ est une série de nombres positifs convergente.
Si la série de nombres complexes u_n est absolument convergente, alors elle définit une série convergente dans $\mathbb{C}$. On remarque que la convergence d'une simple série à termes réels positifs entraîne la convergence de toute la série de nombres complexes, donc de deux (!) séries réelles.
Exemple : la série $\exp(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est absolument convergente. Elle définit la fonction exponentielle.

• Propriété de Bolzano-Weierstrass : $\mathbb{R}$ est relativement compact.
De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si il existe deux nombres réels m et M de sorte que $m \leq x_n \leq M$ quel que soit l'entier n. Alors on peut considérer une suite extraite, c'est à dire une suite obtenue en ne prenant que certains termes de la suite, mais sans avoir le droit de revenir en arrière ; il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de sorte que la suite extraite $y_n \equiv x_{\varphi(n)}$ converge vers une certaine limite ℓ, comprise entre les nombres m et M.
Par exemple, la suite géométrique $x_n = (-1)^n$ de raison -1 est bornée. Si on choisit $\varphi(n) = 2n$ (on garde les termes pairs), la suite extraite $x_{\varphi(n)}$ est constante égale à 1. Si on prend $\psi(n) = 2n+1$ (on garde les termes impairs), la suite extraite $x_{\psi(n)}$ est constante égale à -1.