le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 3 Introduction à la topologie générale

- Distance

On se donne un ensemble (*a priori* non vide !) E. Une fonction "distance" sur E est une application définie de $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de sorte que les quatre axiomes suivants soient satisfaits :
(i) positivité : $\forall x, y \in E,\ d(x,y) \geq 0$
(ii) symétrie : $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$
(iii) inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
(iv) séparation : $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

- Espace métrique

Un espace métrique (E, d) est la donnée d'un ensemble non vide E et d'une distance définie sur E.
Par exemple, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (respectivement des nombres complexes $\mathbb{C}$) est un espace métrique, muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$; le symbole $|\ |$ désigne bien sûr la valeur absolue dans la cas réel ou le module dans le cas complexe. Nous généralisons cet exemple dans le paragraphe suivant.

- Espace vectoriel normé

On se donne un espace vectoriel E sur le corps des réels ou des complexes. Une norme sur E est la donnée d'une fonction norme $\|\ \|$ (d'une "longueur" !) définie sur E et à valeurs réelles telle que l'on a :
(i) positivité : $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$
(ii) homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$
(iii) inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(iv) séparation : $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\ \|$ est un espace vectoriel normé ; on le note $(E, \|\ \|)$.

- Un espace vectoriel normé définit un espace métrique

Avec le contexte et les notations du paragraphe précédent, une distance d est définie sur un espace vectoriel normé par la relation : $d(x,y) = \|x-y\|$ pour tout $x, y \in E$.

- Normes classiques sur les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

On se donne un nombre réel $p \geq 1$. La norme ℓ^p est définie pour $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) par la relation $\|x\|_p = \big(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\big)^{1/p}$. La norme ℓ^∞ est définie sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ par $\|x\|_\infty = \max_{j=1,,\ldots,n} |x_j|$.
Les applications $\|\ \|_p$ et $\|\ \|_\infty$ définies juste au dessus sont effectivement des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. La preuve est facile pour $p = 1$ et pour la norme ℓ^∞ [exercice !]. On doit faire appel à

l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas $\ell = 2$. Dans les autres cas, la preuve est plus délicate et utilise l'inégalité de Hölder. Nous y reviendrons dans une autre leçon de ce cours.

• Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

On se donne n entier ≥ 1 et p réel ≥ 1. La norme ℓ^p est équivalente à la norme ℓ^∞ au sens suivant : $\exists\, \beta > \alpha > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \beta \|x\|_\infty$.
C'est un exercice laissé au lecteur.

• Boule ouverte

On se donne un espace métrique (E, d), un point $x \in E$ et un nombre réel $r > 0$. La boule ouverte $B(x, r)$ de centre x et de rayon r est l'ensemble des points $y \in E$ dont la distance à x est strictement inférieure à r : $B(x, r) = \{y \in E, d(x, y) < r\}$.
Soient $a < b$ deux nombres réels. L'intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ est exactement la boule ouverte de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $\frac{b-a}{2}$ pour la distance associée à la valeur absolue.

• Ouvert

Un ouvert ω de l'espace métrique (E, d) est une réunion quelconque de boules ouvertes. On se donne un ensemble arbitraire d'indices I, des points $x_i \in E$ et des réels strictement positifs r_i ; alors $\omega = \cup_{i \in I} B(x_i, r_i)$.
Si la famille I est vide, alors ω ne contient aucun élément ; l'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert de E. L'ensemble E lui même est un ouvert de E : il suffit d'écrire $E = \cup_{x \in E} B(x, 1)$.
Si $a \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ [exercice].
Une fois que l'on s'est donné la famille de tous les ouverts, on dit qu'on s'est donné une topologie sur l'ensemble E.

• Propriétés fondamentales des ouverts

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
Un ouvert est "voisinage" de chacun de ses points. De façon précise, si on se donne un point x quelconque d'un ouvert non vide ω, il existe au moins une boule ouverte $B(x, r)$ centrée en x et complètement incluse dans l'ouvert ω: $\forall x \in \omega$, $\exists r > 0$, $B(x, r) \subset \omega$.
Réciproquement, si une partie de E est voisinage de chacun de ses points, alors c'est un ouvert.
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Ainsi, l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ car aucune boule centrée en 0 n'est incluse dans cet intervalle.

• Topologie de $\mathbb{R}^n$

On se donne un entier $n \geq 1$. Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, l'équivalence des normes entraîne que tout ouvert ω pour l'une des distances usuelles l'est encore pour une autre : $\forall p \geq 1$ (avec éventuellement $p = \infty$, on écrit parfois en abrégé $p \in [0, \infty]$), $\forall x \in \omega$, $\exists r > 0$, $\{y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\|_p < r\} \subset \omega$.
Toutes les normes introduites plus haut définissent une même topologie dans $\mathbb{R}^n$.

• Parties fermées d'un espace métrique

Un fermé est par définition le complémentaire d'un ouvert. On en déduit que l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble de référence E lui-même sont fermés.
Si $a < b$ sont deux réels, l'intervalle $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Les intervalles $]-\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont également des fermés.

- Propriétés fondamentales des fermés

Une intersection quelconque de fermés est encore un fermé.
Une réunion finie de fermés est fermée.
En conséquence, une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

- Un fermé stabilise la limite

On se donne un fermé non vide d'un espace métrique E et une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in F$. On suppose que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in E$: $\exists \ell \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ d(u_k, \ell) < \varepsilon$. Alors la limite ℓ appartient à F : $\ell \in F$. Quand on passe à la limite pour une suite convergente toute entière incluse dans un fermé, la limite appartient encore au fermé.
L'intervalle $]0, 1]$ de $\mathbb{R}$ n'est pas fermé car la suite $u_k = \frac{1}{k}$ est toute entière dans $]0, 1]$ dès que $k \geq 2$ mais sa limite $\ell = 0$ n'appartient pas à l'intervalle $]0, 1]$. On notera que $]0, 1]$ n'est pas ouvert non plus !

- Un résultat valable dans $\mathbb{R}^n$

On suppose $E = \mathbb{R}^n$ avec la topologie induite par l'une quelconque des normes ℓ^p. On se donne une partie F non vide de $\mathbb{R}^n$ de sorte que pour toute suite convergente $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F $(\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in F)$, la limite ℓ appartient encore à F. Alors F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

- Intérieur

On se donne une partie A d'un espace métrique E. L'ensemble de tous les ouverts qui sont inclus dans A peut être vide et on dit que A est d'intérieur vide ; $\mathring{A} = \emptyset$. Dans le cas contraire, on appelle intérieur de A et on note $\mathring{A}$ la réunion de tous les ouverts qui sont inclus dans A : $\mathring{A} = \cup_{\omega\ ouvert \subset A}\, \omega$. Comme la réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte, l'intérieur de A est ouvert : c'est le plus grand ouvert de E qui est inclus dans la partie A.
Un ouvert est égal à son intérieur : $\mathring{\omega} = \omega$. Un point $\{x\}$ dans $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide : $\mathring{\overbrace{\{x\}}} = \emptyset$.
Si $a < b$ sont deux réels, $\mathring{\overbrace{]a, b[}} = \mathring{\overbrace{[a, b[}} = \mathring{\overbrace{]a, b]}} = \mathring{\overbrace{[a, b]}} =]a, b[$.

- Adhérence

Soit $A \subset E$, espace métrique. Si A est vide, on pose $\overline{A} = \emptyset$. Si A est non vide, l'ensembre de tous les fermés qui contiennent A est non vide puisqu'il contient E lui-même. On appelle adérence de A et on note $\overline{A}$ l'intersection de tous les fermés qui contiennent A : $\overline{A} = \cap_{\phi\ fermé \supset A}\, \phi$. Comme l'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée, l'adhérence de A est fermée : c'est le plus petit fermé qui contient la partie A de E.
Un fermé ϕ est égal à son adhérence : $\overline{\phi} = \phi$.
Si une suite $x_k \in A$ converge dans l'espace E, sa limite ℓ appartient à l'adhérence de A : $\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A\big) \Longrightarrow \big(\lim_{k\longrightarrow\infty} x_k \in \overline{A}\big)$.
Si $a < b$ sont deux réels, $\overline{[a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b]$.
Pour une partie quelconque A de E, on a toujours $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

- Frontière

Pour une partie A d'un espace métrique E, la frontiere ∂A est la différence ensembliste entre son adhérence et son intérieur : $\partial A \equiv \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{x \in \overline{A}, x \notin \mathring{A}\}$.

Si $a < b$, la frontiere de l'intervalle $]a, b[$ est la paire $\{a, b\}$ composée des deux nombres a et b.

- Suite de Cauchy dans un espace métrique

La notion de suite de Cauchy vue pour les suites réelles et complexes se généralise sans difficulté. Une suite de Cauchy dans l'espace métrique (E, d) est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ dont tous les termes sont arbitrairement proches les uns des autres, à condition d'aller assez loin dans la suite : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

- Espace métrique complet

Un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E, alors $\exists \ell \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ d(x_n, \ell) < \varepsilon$.
Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets.

- Fonction continue entre deux espaces métriques

On se donne deux espaces métriques (E, d) et (F, δ), une application f de E dans F et un point $x \in E$. On dit que f est continue en x si et seulement si les valeurs prises par la fonction "au voisinage" de x "diffèrent peu" de $f(x)$:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in E,\ d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Si la fonction f est continue en tout point de E, on dit que f est continue de E dans F.

- Image réciproque

On rappelle une notion fondamantale qui n'a besoin d'aucune structure sur les ensembles. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et B une partie de F. L'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est composée de l'ensemble des points de l'ensemble de départ E qui ont une image par l'application f dans l'ensemble B :
$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

- Propriétés de l'image réciproque

On se donne in ensemble d'indices I et pour $j \in I$, des parties B_j de F. On a :
$f^{-1}(\cup_{j\in I} B_j) = \cup_{j\in I} f^{-1}(B_j)$, $f^{-1}(\cap_{j\in I} B_j) = \cap_{j\in I} f^{-1}(B_j)$. De plus, si B^{c} désigne la partie complémentaire de l'ensemble B relativement à F ($B^{\mathrm{c}} \equiv F \setminus B = \{y \in F, y \notin B\}$), on a $f^{-1}(B^{\mathrm{c}}) = (f^{-1}(B))^{\mathrm{c}}$. La preuve est un exercice laissé au lecteur.

- Un critère de continuité

On se donne deux espaces métriques (E, d) et (F, δ) et une application f de E dans F. L'application f est continue (en tout point de E) si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E: $\forall\, \omega$ ouvert de F, $f^{-1}(\omega)$ est un ouvert de E.
Une autre façon d'exprimer ce critère est de passer aux complémentaires : l'application f est continue (en tout point de E) si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E: $\forall\, \phi$ fermé de F, $f^{-1}(\phi)$ est un fermé de E.

Exercices

- Distance SNCF

Pour x et y dans le plan $\mathbb{R}^2$, on pose $d(x,y) = |x-y|$ si x et y appartiennent à la même demi-droite issue de l'origine et $d(x,y) = |x| + |y|$ dans les autres cas.

a) Montrer que pour tout x et tout y du plan, on a $d(x,y) \geq 0$ et $d(y,x) = d(x,y)$.

b) Montrer que pour tout x et tout y du plan, on a $d(x,y) = 0$, implique $x = y$.

c) Démontrer l'inégalité triangulaire, pour tous les x, y, z du plan : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

d) En déduire que la "distance SNCF" satisfait effectivement les axiomes d'une distance.

- Inégalité de Minkowski pour la norme ℓ^p dans $\mathbb{R}^n$

On se donne p réel supérieur ou égal à 1. Pour $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ appartenant à R^n, on pose $||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{p} |x_j|^p\right)^{1/p}$. On cherche à démontrer l'inégalité triangulaire pour cette norme, c'est à dire $||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$ pour tout x et tout $y \in \mathbb{R}^n$.

a) Montrer cette inégalité dans le cas $p = 1$.

Si $p > 1$, ce que l'on suppose dans toute la suite, on introduit l'exposant conjugué q de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

b) A partir de la concavité de la fonction logarithme, montrer que si α et β sont des réels stritement positifs, on a $\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$.

On se donne deux familles de réels positifs α_j et β_j de sorte que $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j^p = 1$ et $\sum_{j=1}^{p} \beta_j^p = 1$.

c) Montrer que l'on a l'inégalité de Hölder $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \beta_j \leq ||\alpha||_p \, ||\beta||_q$ dans ce cas.

d) Démontrer l'inégalité de Hölder dans le cal général de deux vecteurs α et β de $\mathbb{R}^n$.

e) En déduire l'inégalité de Minkowski pour deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

- Equivalence des topologies dans $\mathbb{R}^n$

On rappelle que pour p réel ≥ 1, la norme $\|x\|_p$ de $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}$. On a aussi par définition (pour $p = \infty$) $\|x\|_\infty = \max_{j=1,,\dots,n} |x_j|$.

a) Donner des valeurs explicites des nombres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \beta \|x\|_\infty$.

Pour p réel ≥ 1 ou $p = \infty$ et $r > 0$, on appelle $B_p(x,r)$ la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r: $B_p(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y-x\|_p < r\}$.

b) Dessiner les boules $B_1(0,1)$ et $B_\infty(0,1)$.

c) Montrer que pour tout $r > 0$, il existe $r' > 0$ et $r'' > 0$ de sorte que $B_\infty(x,r') \subset B_p(x,r) \subset B_\infty(x,r'')$. On précisera des valeurs simples de r' et r'' en fonction de r et des paramètres α et β de la question a).

d) On se donne un nombre réel $p \geq 1$. Soit ω un ouvert pour la topologie associée à la norme ℓ^p. Montrer que ω est voisinage de chacun de ses points pour la norme ℓ^∞: $\forall x \in \omega,\ \exists \varepsilon > 0,\ B_\infty(x,\varepsilon) \subset \omega$.

e) En déduire que tout ouvert pour la topologie associée à la norme ℓ^p est un ouvert pour la topologie associée à la norme ℓ^∞.

f) De façon analogue, si ω un ouvert pour la topologie associée à la norme ℓ^∞, montrer que ω est voisinage de chacun de ses points pour la norme ℓ^p: $\forall x \in \omega,\ \exists \varepsilon > 0,\ B_p(x,\varepsilon) \subset \omega$.

g) En déduire que tout ouvert pour la topologie associée à la norme ℓ^∞ est un ouvert pour la topologie associée à la norme ℓ^p.

h) Conclure sur le fait que dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes usuelles définissent la même topologie.

• Ouvert ou fermé ?

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

a) Démontrer que f est différentiable en tout point et expliciter la différentielle $\mathrm{d}f(x, y)$.

b) En déduire que f est continue en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

c) L'ensemble suivant $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$, est-il ouvert ? Est-il fermé ? Justifier avec précision votre réponse.

d) Mêmes questions avec l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

e) Mêmes questions avec l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$.

f) Mêmes questions avec l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 > 1\}$.

• Intérieur et adhérence

On se donne un intervalle borné non vide $A =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'on a $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$.

b) Montrer que l'égalité précédente peut être en défaut dans le cas où A n'est pas un intervalle.

c) Montrer que si $A =]a, b[$ est un intervalle borné non vide de $\mathbb{R}$, on a maintenant $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$.

d) Montrer que l'égalité précédente peut être en défaut dans le cas où A n'est pas un intervalle.

• Ouvert ou fermé ? [avril 2014]

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy - 1$.

a) Démontrer que f est différentiable en tout point et expliciter la différentielle $\mathrm{d}f(x, y)$.

b) En déduire que que f est continue en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

On introduit les ensembles suivants : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq 1\}$.

c) L'ensemble A est-il ouvert ?

d) L'ensemble A est-il fermé ?

e) L'ensemble B est-il ouvert ?

f) L'ensemble B est-il fermé ?

• Ouvert ou fermé ? [février 2018]

On considère les parties E et F du plan $\mathbb{R}^2$ définies par

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq \sin^2 x\}$ et

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } 0 < y < \sin^2 x\}$.

a) Dessiner rapidement l'ensemble E.

b) Montrer que l'ensemble F n'est pas vide.

c) Le point $(\pi, 0)$ appartient-il à l'ensemble F ?

d) L'ensemble E est-il borné ?

e) L'ensemble E est-il ouvert ?

f) L'ensemble E est-il fermé ?

g) L'ensemble F est-il borné ?

h) L'ensemble F est-il ouvert ?

i) L'ensemble F est-il fermé ?