le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 4 Compacité

- Suites bornés

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est bornée si il existe deux nombres réels m et M de sorte que $m \le u_n \le M$ quel que soit l'entier n.
Par exemple, la suite géométrique $u_n = (-1)^n$ de raison -1 est bornée. Si on pose maintenant $v_k = u_{2k}$ et $w_k = u_{2k+1}$, on garde les termes pairs ou les termes impairs de la suite. Alors $v_k = 1$ et $w_k = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Chacune des deux suites extraites est constante, donc converge !

- Sous-suite extraite

On se donne une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique E et une injection (application qui ne prend pas deux fois la même valeur) strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La suite $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u'_k = u_{\varphi(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ est dite suite extraite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ grâce à l'injection φ.

- Valeur d'adhérence

On se donne un espace métrique E et une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E. On dit que α est valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \ge N,\ d(u_n, \alpha) \le \varepsilon$.

- Sous-suite extraite et valeur d'adhérence

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de l'espace métrique (E, d). Si α est une valeur d'adhérence de la suite, on peut trouver une sous-suite extraite $u'_k = u_{\varphi(k)}$ qui converge vers α.
Réciproquement, si il existe une sous-suite extraite u'_k qui converge vers α, alors α est une valeur d'adhérence de la suite initiale $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Par exemple, les suites v_k et w_k extraites de la suite géométrique de raison -1 au premier paragraphe de cette leçon convergent chacune vers une des valeurs d'adhérence de cette suite.

- Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Soient $a < b$ deux nombres réels et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels incluse dans l'intervalle fermé $[a, b]$: $a \le u_k \le b$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a au moins une valeur d'adhérence ; il existe $\alpha \in [a, b]$, tel qu'on peut extraire une sous-suite qui converge vers α.
Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$, on peut considérer une suite extraite de cette suite, c'est à dire une suite obtenue en ne prenant que certains termes de la suite, mais sans avoir le droit de revenir en arrière. Il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de sorte que la suite extraite $u'_k \equiv u_{\varphi(k)}$ converge vers une certaine limite ℓ, comprise entre les nombres a et b.

- Partie compacte d'un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique et K une partie non vide de E. On dit que K est compacte si et seulement si de tout recouvrement ouvert $(\omega_j)_{j\in J}$ de K, c'est a dire $K \subset \cup_{j\in J}\, \omega_j$, on peut extraire un recouvrement ouvert fini : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists\, j_k \in J$, $K \subset \cup_{k=1}^{N}\, \omega_{j_k}$.

- Toute suite d'un compact a au moins une valeur d'adhérence dans le compact.

- Tout compact d'un espace métrique est borné

Si $K \neq \emptyset$ est un compact de l'espace métrique (E, d), alors il existe $M \geq 0$, tel que $\forall x, y \in K$, $d(x, y) \leq M$.

- Tout compact d'un espace métrique est fermé

- Tout compact d'un espace métrique est complet

Toute suite de Cauchy $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ composée d'éléments $u_k \in K \subset E$ du compact K est convergente. Elle a au moins une valeur d'adhérence et converge alors vers cette valeur d'adhérence, qui est alors unique.

- Forme forte du théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit K un espace métrique non vide. Il est compact si et seulement si toute suite de K admet une valeur d'adhérence dans K, c'est à dire si et seulement si de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers une limite ℓ qui est un point de K.

- Compacts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$

On se donne un entier $n \geq 1$. Une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.
Si $a < b$ sont deux nombres réels, l'intervalle $[a, b]$ est compact dans $\mathbb{R}$.

- Fonction continue sur un compact

Soit (K, d) un espace métrique compact (non vide), (F, δ) un autre espace métrique et $f : K \longrightarrow F$ une application continue de K dans F. Alors l'image directe $f(K) = \{f(x), x \in K\}$ de K par l'application f est un compact de F.

- Une fonction numérique sur un compact atteint ses bornes

Soit K une partie compacte non vide d'un espace métrique et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Il existe $x_0 \in K$ et $y_0 \in K$ de sorte que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ pour tout $x \in K$.

- Une fonction continue sur un compact est uniformément continue

Soit (K, d) un espace métrique compact (non vide), (F, δ) un autre espace métrique et $f : K \longrightarrow F$ une application continue de K dans F. Alors l'application f est uniformément continue : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x, y \in K$, $d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exercices

- Parallélogramme

On désigne par K le carré "unité" de $\mathbb{R}^2$: $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

a) L'ensemble K est un compact de $\mathbb{R}^2$. Pourquoi ?

On se donne deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$ et on pose $P = \{x\,u + y\,v, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

b) Montrer en le justifiant que P est un compact de $\mathbb{R}^2$.

• Ouvert borné de $\mathbb{R}$

Expliquer pourquoi l'intervalle ouvert $]0,\, 1[$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}$.

• Fermé dans un compact

Soit F un fermé non vide inclus dans un compact K de l'espace métrique E.

a) Montrer que F est séquentiellement compact, c'est à dire que toute suite de F admet au moins une valeur d'adhérence dans F.

b) Montrer que de tout recouvrement ouvert de F, on peut extraire un recouvrement ouvert fini.

• Equivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$

On rappelle que dans $\mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \sup\{|x_j|,\, j = 1, \ldots, n\}$. On introduit le disque unité $D = \{x \in \mathbb{R}^n,\, ||x||_\infty \leq 1\}$. On se donne aussi une norme $||x||$ sur $\mathbb{R}^n$ différente *a priori* de la précédente.

a) Montrer que l'application "norme infinie" : $\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto ||x||_\infty \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||\;||_\infty$.

b) Démontrer que le disque unité D est compact.

c) On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^n,\, ||x||_\infty = 1\}$. Montrer que la boule unité B est compact pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||\;||_\infty$.

d) Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| \leq \beta\, ||x||_\infty$.

e) En déduire que l'application "norme" : $\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto ||x|| \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||\;||_\infty$.

f) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $||x|| \geq \alpha$ pour tout $x \in B$.

g) Montrer l'équivalence des normes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha\, ||x||_\infty \leq ||x|| \leq \beta\, ||x||_\infty$.

• Espace vectoriel de dimension finie

On suppose connu le résultat de l'exercice précédent : dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n sur $\mathbb{R}$. On se fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et si $x = \sum_{j=1}^n x_j\, e_j$ est un vecteur de E, on pose $||x||_\infty = \sup\{|x_j|,\, j = 1, \ldots, n\}$. De plus, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = x = \sum_{j=1}^n x_j\, e_j \in E$ et on pose enfin $B = \{y \in \mathbb{R}^n,\, ||y||_\infty = 1\}$.

a) Montrer que l'on définit une norme sur E en posant $||x||_\infty = \sup\{|x_j|,\, j = 1, \ldots, n\}$.

b) Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| \leq \beta\, ||x||_\infty$.

c) Montrer que l'application Φ est continue de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||\;||_\infty$ dans E muni de la norme $||\;||$.

d) Montrer que l'application $E \ni x \longmapsto ||x|| \in \mathbb{R}$ est continue sur E muni de la norme $||\;||_\infty$.

e) Montrer que $\{||\Phi(x)||,\, x \in B\}$ définit une partie compacte de $\mathbb{R}$ incluse dans $]0, +\infty[$.

f) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $||x|| \geq \alpha$ pour tout $x \in \Phi(B)$.

g) Montrer l'équivalence des normes : pour tout $x \in E$, $\alpha\, ||x||_\infty \leq ||x|| \leq \beta\, ||x||_\infty$.

• Continuité des applications linéaires en dimension finie

On suppose connu le résultat de l'exercice précédent : dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On se donne une application linéaire A

de E de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé F dont on ne précise pas la dimension.
Montrer que A est continue : $\exists M \geq 0,\ \forall x \in E,\ ||Ax||_F \leq M\ ||x||_E$.

- Sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{R}$ dont on ne précise pas la dimension.
a) Montrer que toute suite de F qui converge dans E a une limite qui appartient à F.
b) En déduire que F est fermé dans E.

- Fonctions continues [novembre 2015]

Soit f une fonction continue de $[0,\,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
a) La fonction f a-t-elle nécessairement un maximum ? En d'autres termes, existe-il toujours $x_0 \in [0,\,1]$ de sorte que $\forall x \in [0,\,1],\ f(x) \leq f(x_0)$?
b) Reprendre la question précédente avec f fonction continue de $]0,\,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: existe-il nécessairement $x_0 \in]0,\,1[$ de sorte que $\forall x \in]0,\,1[,\ f(x) \leq f(x_0)$?

- Une fonction non uniformément continue

a) Montrer que si $|x| \leq 1$, alors $|\exp(x) - 1| \leq 2\,|x|$.
b) En déduire que si l'on se donne $M \in \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est uniformément continue sur l'intervalle $]-\infty,\,M]$.
c) Démontrer que la fonction exponentielle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$:
$\forall\, \eta > 0,\ \exists\, x,\,y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \eta$ et $|\exp(x) - \exp(y)| \geq 1$.

- Une propriété des matrices symétriques définies positives [février 2016]

Soit n en entier supérieur ou égal à un. Pour $x = (x_1,\,\ldots,\,x_n)$ et $y = (y_1,\,\ldots,\,y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire $(x\,,\,y)$ des vecteurs x et y par la relation $(x\,,\,y) = \sum_{j=1}^n x_j\,y_j$ et la norme $||\,x\,||$ de x par $||\,x\,|| = \sqrt{(x\,,\,x)}$. On définit la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ selon
$S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||\,x\,|| = 1\}$. On se donne une matrice A à n lignes et n colonnes, symétrique, c'est à dire $(A\,x\,,\,y) = (x\,,\,A\,y)$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$ et définie positive : $(A\,x\,,\,x) > 0$ si x est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Pour x dans $\mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = (A\,x\,,\,x)$.
a) La sphère S est-elle ouverte ? fermée ? bornée ? compacte ?
b) On suppose dans cette question (uniquement) $n = 2$. On se donne une suite quelconque de réels $\left(\alpha^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et on pose $x^k = (\cos(\alpha^k)\,,\,\sin(\alpha^k))$. Montrer que $x^k \in S$ pour tout k et rappeler pourquoi la suite $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet toujours au moins une valeur d'adhérence.
c) Montrer que l'application f est continue de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En déduire qu'elle est continue de S dans $\mathbb{R}$.
d) Montrer qu'il existe α strictement positif de sorte que $\forall x \in B,\ f(x) \geq \alpha$.
e) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (A\,x\,,\,x) \geq \alpha\ ||x||^2$.

- Matrices symétriques [avril 2016]

Pour $X \equiv (x,\,y)$ vecteur de $\mathbb{R}^2$, on introduit la norme euclidienne $||\,X\,||$ définie par
$||\,X\,|| = \sqrt{x^2+y^2}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $X \equiv (x, y)$ vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire (AX, X) est strictement positif.
b) En utilisant la compacité de la sphère unité de $\mathbb{R}^2$, déduire de la question précédente qu'il existe α strictement positif de sorte que $(AX, X) \geq \alpha \, || X ||^2$.
c) On cherche à reprendre les questions précédentes en remplaçant la matrice A par la matrice B. A-t-on $(BX, X) > 0$ pour tout X de $\mathbb{R}^2$ non nul ?

- Théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in E$ et $r > 0$, on note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r: $B(x, r) = \{y \in E, || y - x || < r\}$. On admet le résultat d'un des exercices précédents : si F est un sous-espace de dimension finie dans un espace vectoriel normé E, alors il est fermé dans E. Soit U la boule unité fermée définie par
$U \equiv \{x \in E, \; || x || \leq 1\}$. On suppose que U est compacte. Nous allons montrer qu'alors l'espace E est de dimension finie.
a) Si la boule unité fermée U est compacte, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et des vecteurs $a_1, \ldots, a_N$ tels que $a_j \in U$ pour tout $j = 1, \ldots, N$ et $U \subset \cup_{j \leq N} B(a_j, 1)$.
b) Montrer que si l'espace E est de dimension infinie, l'espace $F = < a_1, \ldots, a_N >$ généré par $a_1, \ldots, a_N$ est fermé dans E.
c) En déduire qu'il existe $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ de sorte que $B(x, \varepsilon) \subset F^c$, complémentaire de F dans E.
d) On introduit la distance $d(x, F)$ de x au sous-espace F: $d(x, F) = \inf_{y \in F} || x - y ||$. Montrer que $d(x, F) \geq \varepsilon > 0$.
e) Montrer qu'alors la boule fermée $\Sigma = \{y \in F, || x - y || \leq 2 d(x, F)\}$ est compacte.
f) Démontrer que la fonction $\Sigma \ni y \longmapsto || x - y || \in \mathbb{R}$ est continue et atteint sa borne inférieure en $y_0 \in \Sigma \subset F$.
g) On pose $a = \frac{x - y_0}{||x - y_0||}$. Montrer que $a \in U$.
h) Montrer que quelque soit $z \in F$, $|| a - z || \geq 1$.
i) Montrer qu'il existe $i \leq N$ tel que $|| a - a_i || < 1$.
j) En déduire une contradiction. L'hypothèse faite à la question b) est fausse et l'espace E est de dimension finie.