le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 5 Théorème du point fixe et applications

- Fonctions continues sur un compact

On se donne deux nombres réels $a < b$ et on rappelle que $\mathscr{C}([a, b]), \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit cet espace d'une norme définie par $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|, a \le x \le b\}$. Comme l'application f est continue sur le compact $[a, b]$, on sait que la borne supérieure qui définit cette norme est en fait un maximum : il existe $\xi \in [a, b]$, $|f(\xi)| = ||f||_\infty$.
L'espace $\big(\mathscr{C}([a, b]), \mathbb{R}), ||\,||_\infty\big)$ est un espace normé. La preuve de cette propriété s'appuie sur le résultat préliminaire suivant.
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on pose
$B = \lambda A = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in A, y = \lambda x\}$. Si $\lambda > 0$, l'ensemble B est aussi une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et on a la relation $\sup B = \lambda \sup A$.

- Espace de Banach

Un espace de Banach $(E, ||\,||)$ est un espace vectoriel normé complet : toute suite de Cauchy converge dans l'espace E.

- Exemples d'espaces de Banach

Les espaces usuels en dimension finie sont des espaces de Banach : $(\mathbb{R}, |\,|)$, $(\mathbb{C}, |\,|)$ et $(\mathbb{R}^n, ||\,||_p)$ et $(\mathbb{C}^n, ||\,||_p)$ avec $p \ge 1$. On rappelle que si $p \ge 1$ est un nombre réel et $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), la norme ℓ_p est définie par la relation $||x||_p = \big(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\big)^{1/p}$. La norme ℓ^∞ est définie sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ par $||x||_\infty = \max_{j=1,,\ldots,n} |x_j|$.
Pour p réel supérieur ou égal à 1, l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des séries (u_k) dont la puissance p^{e} est absolument convergente : $\big(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p\big)^{1/p} < \infty$. On peut montrer que l'expression $||u||_p = \big(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p\big)^{1/p}$ définit une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$ et que muni de cette norme, $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
Si $p = \infty$, l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bornées :
$\exists\, C \ge 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_k| \le C$. Alors une norme peut être définie sur cet espace vectoriel :
$||u||_\infty = \sup\{|u_k|, k \in \mathbb{N}\}$. Muni de cette norme, $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
Les deux exemples précédents s'étendent sans difficulté à $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour $p \ge 1$. Si p est réel ≥ 1, $||u||_p = \big(\sum_{k=-\infty}^\infty |u_k|^p\big)^{1/p}$ et si $p = \infty$, $||u||_\infty = \sup\{|u_k|, k \in \mathbb{Z}\}$.
D'autres exemples, qui font appel à la théorie de l'intégrale de Lebesgue, sont construits dans la suite du cours.

François Dubois, octobre 2019.

• L'espace normé $\big(\mathscr{C}([a,\,b]),\mathbb{R}),\,||\;||_\infty\big)$ est complet
La preuve utilise de façon fondamentale qu'une application continue du compact $[a,\,b]$ vers $\mathbb{R}$ est uniformément continue :
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x,y\in[a,\,b],\ |y-x|<\eta \implies |f(y)-f(x)|<\varepsilon$. Alors la limite d'une suite de Cauchy $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\big(\mathscr{C}([a,\,b]),\mathbb{R}),\,||\;||_\infty\big)$ est une fonction continue $f\in\mathscr{C}([a,\,b]),\mathbb{R})$. De plus, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et l'espace $\big(\mathscr{C}([a,\,b]),\mathbb{R}),\,||\;||_\infty\big)$ est complet.

• Théorème du point fixe de Banach-Picard
Soit $(E,\,||\;||)$ un espace normé complet, f une application contractante de E dans E : il existe un nombre k de sorte que $0\leq k<1$ et pour tout $x,y\in E,\ ||\,f(y)-f(x)\,||\leq\ k\ ||\,y-x\,||$. Alors il existe un et un seul point fixe ξ de l'application f : $\exists!\ \xi\in E,\ f(\xi)=\xi$.
La preuve de ce théorème consiste à se donner $x_0\in E$ et à étudier la suite de ses itérés par l'application f : $x_{n+1}=f(x_n)$. Alors on montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Caucly. Comme l'espace E est complet, elle converge vers un point $\xi\in E$ qui satisfait par continuité à la relation $f(\xi)=\xi$. Comme $k<1$, un tel point fixe est nécessairement unique.
Avec les itérations de Picard $x_{n+1}=f(x_n)$, la preuve fournit un procédé explicite d'approximation du point fixe : c'est l'algorithme du point fixe.
Un exemple élémentaire est fourni par l'application $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ [exercice].
Si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfait simplement à l'inégalité $|f(y)-f(x)|\ \leq\ |y-x|$, on peut construire facilement un contre-exemple à l'unicité d'un point fixe.

• Fonction lipschitzienne
Une fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite lipschitzienne si il existe une constante $K\geq0$ de sorte que pour tout $u,v\in\mathbb{R},\ |\psi(v)-\psi(u)|\ \leq\ |v-u|$.
Si la constante de Lipschitz K est strictement inférieure à 1, l'application ψ est contractante.

• Etude d'une équation intégrale
On se donne $a>0,\ K\geq0$ de sorte que $K\,a<1,\ u_0\in\mathbb{R}$ et une fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lipschitzienne et de constante de Lipschitz égale à K. On rappelle que mini de sa norme $||\;||_\infty$, l'espace $E=\mathscr{C}([0,\,a])$ est un espace de Banach. L'équation intégrale $u(t)=u_0+\int_0^t\psi(u(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ pout tout $t\in[0,\,a]$ et d'inconnue $u\in\mathscr{C}([0,\,a])$ a une solution unique $u\in\mathscr{C}([0,\,a])$. La fonction u solution de l'équation intégrale est une fonction continue sur $[0,\,a]$ et elle satisfait à la condition initiale $u(0)=u_0$.
Pour démontrer ce résultat, on construit d'abord une fonction f de E dans E qui à toute fonction continue v définie sur l'intervalle $[0,\,a]$ associe une nouvelle fonction $f(v)$ également définie sur l'intervalle $[0,\,a]$ par les relations $f(v(t))=u_0+\int_0^t\psi(v(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $t\in[0,\,a]$.
La fonction $f(v)$ est clairement continue donc f est une application de E dans E.
On montre ensuite que f est contractante : $||\,f(v)-f(u)\,||_\infty\leq K\,a\ ||\,v-u\,||_\infty$. Il suffit enfin d'appliquer le théorème du point fixe : puisque $K\,a<1$, il existe une unique fonction
$u\in E=\mathscr{C}([0,\,a])$ telle que $f(u)=u$, c'est à dire pour tout $t\in[0,\,a],\ u(t)=u_0+\int_0^t\psi(u(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.
Le résultat est alors démontré.

- Equation différentielle

La solution $u \in \mathscr{C}([0,a])$ du problème $u(t) = u_0 + \int_0^t \psi(u(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $t \in [0,a]$ est une fonction dérivable puisque le membre de droite est dérivable. On en déduit que pour tout $t \in [0,a]$, on a la relation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \psi(u(t))$. De plus, on a la condition initiale $u(0) = u_0$. Cette méthode permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'équations différentielles, au moins dans un intervalle de temps suffisamment petit.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz

On se donne une fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ localement lipschitzienne : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\exists K_u \geq 0$, $\exists \eta_u > 0$, $\forall v, w \in \mathbb{R}$, $\big(|v-u| < \eta_u$ et $|w-u| < \eta_u\big) \Longrightarrow |\psi(v) - \psi(w) \leq\ K_u\,|v-u|$. Alors pour toute condition initiale $u_0 \in \mathbb{R}$, il existe $a(u_0) > 0$ tel que le problème de chercher une fonction u définie sur l'intervalle $[0, a(u_0)]$ telle qu'on a d'une part l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \psi(u(t))$ pour tout t tel que $0 \leq t \leq a(u_0)$ et d'autre part la condition initiale $u(0) = u_0$, a une solution unique.

On peut résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \psi(u(t))$ avec la condition initiale $u(0) = u_0$ sur un (petit) intervalle $[0, a(u_0)]$. De plus, la solution est unique.

En pratique, si la fonction ψ est continuement dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire si $\psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction ψ est localement lipschitzienne.

La question suivante est, partant du "petit" intervalle $[0, a(u_0)]$, d'augmenter la taille de l'intervalle où la solution de l'équation différentielle est définie de façon unique. On peut alors construire un intervalle maximal (non unique *a priori*) où la solution de l'équation différentielle jointe à la condition initiale peut être définie. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent ouvrage de J.P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles*, publié aux Presses Universitaires de Grenoble en 1996.

- Exemples de solutions maximales d'équations différentielles

Si $u_0 = 1$ et $\psi(u) = -u$, on se convainc facilement que la solution maximale de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ et telle que $u(0) = 1$ est égale à la fonction $u(t) = \exp(-t)\,u_0$, qui est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il suffit de poser $v(t) = u(t)\,\exp(t)$ et de la dériver. On a alors $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, la fonction v est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et la valeur de cette constante est égale à $v(0) = 1$.

Si $u_0 = 0$ et $\psi(u) = 1 + u^2$, la fonction $v(t) = \arctan(u(t))$ a cette fois une dérivée égale à 1 et $u(t) = \tan(t)$. La fonction u ne peut donc pas être définie comme une fonction régulière hors de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, intervalle maximal de définition de l'équation différentielle pour la condition initiale $u_0 = 0$.

Exercices

- Une famille de fonctions lipschitziennes

On se donne une application continuement dérivable ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $K \geq 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\psi'(x)| \leq K$.

Démontrer que la fonction ψ est lipschitzienne.

- Exemple élémentaire de l'utilisation du théorème du point fixe

On se donne la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivante : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la dérivée de f est majorée en valeur absolue par $\frac{3\sqrt{3}}{8}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

b) En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, que l'application f est contractante.

c) Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une et une seule solution $x \in \mathbb{R}$.

- Un exemple de fonction localement lipshitzienne

On se donne ψ fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ψ est dérivable et sa dérivée ψ' est une application continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité $|\psi(y) - \psi(x)| \leq |\int_x^y |\psi'(\xi)| \mathrm{d}\xi|$.

On se donne $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe $K_x \geq 0$ tel que $\forall \xi \in [x-1, x+1]$, $|\psi'(\xi)| \leq K_x$.

c) En déduire que la fonction ψ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

d) Donner un exemple de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ non lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

- L'espace des séries absolument convergentes est complet

On rappelle que $\ell^1(\mathbb{N})$ est l'espace des séries absolument convergentes ; $u \in \ell^1(\mathbb{N})$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} < \infty$. On pose $|| u || = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| < \infty$.

a) Rappeler pourquoi $\ell^1(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel et pourquoi il est normé avec l'expression $|| u ||$ introduite ci-dessus.

On se donne une suite de Cauchy $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$.

b) À l'aide de la définition d'une suite de Cauchy, rappeler quelles sont les relations satisfaites par les nombres u_k^n, où ce nombre est le k^{o} terme de la n^{o} série de la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite u_k^n converge pour $n \longrightarrow \infty$ vers un nombre $u_k \in \mathbb{R}$.

d) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{m} |u_k^p - u_k| \leq \varepsilon$.

e) En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k^p - u_k| \leq \varepsilon$.

f) En déduire que $u \in \ell^1(\mathbb{N})$.

g) En déduire que la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$.

- Normes matricielles

Pour tout l'exercice, on se fixe une norme sur $\mathbb{R}^n$ qui est notée $| \bullet |$. Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$) , qu'on peut donc identifier à une matrice A si on munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique pour fixer les idées. Pour un tel opérateur, on pose $\| A \| = \sup \{ |A\xi|, |\xi| \leq 1 \}$.

a) Montrer que le nombre $\| A \|$ est bien défini par la relation proposée juste au dessus.

b) Montrer que $\| A \|$ est bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$: c'est une grandeur toujours positive ou nulle ; si elle est nulle, alors A est nul et enfin on a l'inégalité triangulaire $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$.

c) Montrer de plus qu'on a compatibilité de cette norme avec la multiplication dans l'algèble $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$: $\| AB \| \leq \| A \| \, \| AB \|$.

- Formule de Duhamel

Cet exercice fait suite du précédent. On se donne une matrice A réelle à n lignes et n colonnes ($A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$) et un nombre réel θ arbitraire.

a) Montrer que la série de terme général $\frac{\theta}{n!} A^n$ est "normalemant convergente", ce qui signifie que la série (à termes positifs !) des normes $\| \frac{\theta}{n!} A^n \|$ est convergente.
On note $\exp(\theta A)$ sa somme, qui est une matrice à n lignes et n colonnes. Si φ est un vecteur arbitraire (mais fixé) de $\mathbb{R}^n$, monter que le vecteur $y(t)$ fonction du temps défini par $y(t) = \exp(tA) \bullet \varphi$ est en fait une fonction dérivable et calculer la dérivée $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
b) En déduire une expression de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A \bullet u = 0$, munie de la condition initiale $u(0) = \varphi$.
Sans changer la condition initiale, on se donne un vecteur $f(t)$ de $\mathbb{R}^n$ et on remplace l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A \bullet u = 0$ par la dynamique $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A \bullet u = f(t)$.
c) Montrer qu'alors le vecteur solution $u(t)$ est donné par la relation suivante, connue sous le nom de "formule de Duhamel" : $u(t) = \exp(-tA) \bullet \varphi \, + \int_0^t \exp(-(t-s)A) \bullet f(s) \, \mathrm{d}s$.

- Résolution d'une famille d'équations [février 2016]

Pour $X \equiv (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\| X \| = \max(|x|, |y|)$. On se donne t réel arbitraire et on définit l'application f_t de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :
$f_t(X) = \big(\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}\sin(x+y) + t - 3 \, , \, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\cos(x-y) + t^2 + 7\big)$.
a) Montrer que pour tout x, y, x', y' dans $\mathbb{R}$, on a les estimations
$|\sin(x+y) - \sin(x'+y')| \leq 2 \, |\sin\big(\frac{x-x'+y-y'}{2}\big)|$ et
$|\cos(x-y) - \cos(x'-y')| \leq 2 \, |\sin\big(\frac{x-x'-(y-y')}{2}\big)|$.
b) En déduire que pour $X \equiv (x, y)$ et $X' \equiv (x', y')$, on a
$|\sin(x+y) - \sin(x'+y')| \leq 2 \, \| X - X' \|$ et $|\cos(x-y) - \cos(x'-y')| \leq 2 \, \| X - X' \|$.
c) Déduire des questions précédentes que l'application f_t est contractante : pour X et X' arbitraires dans $\mathbb{R}^2$, on a $\| f(X) - f(X') \| \leq \frac{5}{6} \| X - X' \|$.
d) Montrer que pour tout réel t, il existe un unique couple de réels (x_t, y_t) de sorte que
$\frac{1}{2}y_t - x_t + \frac{1}{6}\sin(x_t + y_t) + t = 3, \quad \frac{1}{3}x_t + y_t - \frac{1}{4}\cos(x_t - y_t) - t^2 = 7$.