le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 6 Introduction au calcul différentiel

- Voisinage d'un point dans un espace métrique

On se donne un point x_0 d'un espace métrique non vide (E, d). Un voisinage $V(x_0)$ du point x_0 est par définition une partie de E qui contient au moins une boule ouverte de centre x_0 :
il existe $\varepsilon > 0$, $B(x_0, \varepsilon) \subset V(x_0)$.
Nous avons vu dans un chapitre précédent qu'une partie Ω non vide de E est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.

- Rappel sur la continuité des fonctions de deux variables réelles

Nous choisissons une norme $|x|$ dans $\mathbb{R}^2$. Par exemple la norme euclidienne pour fixer les idées ou l'une quelconque des normes ℓ^p avec $p \geq 1$.
On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^2$: il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que f est une application définie dans $V(x_0)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en x_0 si et seulement si
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in V(x_0)$, $\big(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon\big)$.
Par exemple, les "fonctions coordonnées" "x" et "y" : $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \longmapsto x(x_1, x_2) = x_1$ et $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \longmapsto y(x_1, x_2) = x_2$ sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Il en est de même pour toute fonction polynômiale.
Un contre-exemple classique est proposé par Laurent Schwartz dans son *Cours d'Analyse à l'École polytechnique* (Hermann, Paris, 1967) page 196 : on pose
$f(x, y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. et $f(0, 0) = 0$. Bien que définie en tout point de $\mathbb{R}^2$, cette fonction de deux variables n'est pas continue au point $(x, y) = (0, 0)$.

- Dérivées partielles

On fixe une des variables et on fait varier l'autre. On pose par exemple $f_{x_2}(x) = f(x, x_2)$ et $\widetilde{f}_{x_1}(y) = f(x_1, y)$. La dérivée partielle selon la première variable est simplement la dérivée de f_{x_2} quand elle existe : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, x_2) = f'_{x_2}(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h, x_2) - f(x, x_2)\big)$. De même, la dérivée partielle de la fonction f selon la seconde variable est simplement la dérivée de $\widetilde{f}_{x_1}$ quand elle existe : $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, y) = \widetilde{f}'_{x_1}(y) = \lim_{k \longrightarrow 0} \frac{1}{k}\big(f(x_1, y+k) - f(x_1, y)\big)$.
Attention. L'existence de dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité ! Par exemple, la fonction introduite par Laurent Schwartz qui est nulle en zéro et égale à
$f(x, y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si (x, y) n'est pas situé à l'origine, admet deux dérivées partielles en $(0, 0)$:
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$.

- Différentielle, application linéaire tangente

On se donne $x_0 = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, une fonction f définie au voisinage de x_0. On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont des fonctions continues au voisinage de x_0. On se donne

aussi un “petit” vecteur $h=(h_1,h_2)$. Alors il existe une fonction ε définie au voisinage de $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ et qui tend vers zéro si h tend vers zéro de sorte que
$f(x_1+h_1,x_2+h_2)=f(x_0)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\,h_2+|h|\,\varepsilon(h)$. Ce développement met en évidence, lorsque x_0 est fixé, une application linéaire
$\mathbb{R}^2\ni(h_1,h_2)\longmapsto\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\,h_2\in\mathbb{R}$. Cette application linéaire est par définition l’application linéaire tangente à f en x_0. On la note $\mathrm{d}f(x_0)$ et
$\mathrm{d}f(x_0)\,.\,h=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\,h_2$ est la notation usuelle pour l’image de (h_1,h_2) par $\mathrm{d}f(x_0)$.

- Matrice jacobienne

On représente l’application linéaire tangente $\mathrm{d}f(x_0)$ avec une matrice, appelée matrice jacobienne. On pose $J_f(x_0)=\big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\big)$. C’est une matrice ligne à coefficients réels avec une ligne et deux colonnes. Si $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$, alors h^{t} est la matrice colonne transposée associée et on a $\mathrm{d}f(x_0)\,.\,h=J_f(x_0)\,h^{\mathrm{t}}$.

- Application différentiable en un point

Soit $x_0=(x_1,x_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction numérique définie au voisinage de x_0. On dit que f est différentiable en x_0 si et seulement si il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ notée $\mathrm{d}f(x_0)$ et une application ε définie au voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^2$ qui tend vers zéro lorsque h tend vers zéro dans $\mathbb{R}^2$ de sorte que $f(x_0+h)=f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)\,.\,h+|h|\,\varepsilon(h)$.

- La différentiabilité entraîne la continuité

Si la fonction f définie au voisinage de x_0 est différentiable au point x_0, alors elle est continue en ce point.
La réciproque est fausse. Par exemple, l’application $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ est continue en zéro mais elle n’y est pas différentiable.

- La différentiabilité entraîne l’existence de dérivées partielles

Si la fonction f définie au voisinage de x_0 est différentiable au point x_0, alors elle possède des dérivées partielles en ce point. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)=\mathrm{d}f(x_0)\,.\,(1,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)=\mathrm{d}f(x_0)\,.\,(0,1)$.
Pour les applications coordonnées x et y introduites plus haut dans ce chapitre, on a
$\mathrm{d}x(x_0)\,.\,h=h_1$. De même, $\mathrm{d}y(x_0)\,.\,h=h_2$. En pratique, on utilise la notation abusive $h_1=\mathrm{d}x$ et $h_2=\mathrm{d}y$. On écrit alors la relation rigoureuse $\mathrm{d}f(x_0)\,.\,h=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\,h_2$ de façon plus synthétique : $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$.
Exemple des coordonnées polaires dans le plan. On calcule *a priori* les coordonnées cartésiennes x et y à partir des coordonnées polaires r et θ selon les relations $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. On a après un calcul classique de dérivées partielles $\mathrm{d}r=\frac{x}{r}\,\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\,\mathrm{d}y$ et
$\mathrm{d}\theta=-\frac{y}{r^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{r^2}\,\mathrm{d}y$.

- Dérivée selon un vecteur

On se donne un point $x_0\in\mathbb{R}^2$ et un vecteur on nul $v\in\mathbb{R}^2$. On dit que la fonction f définie au voisinage de x_0 est dérivable dans la direction du vecteur v si et seulement si la fonction de variable réelle et à valeurs réelles $\varphi(\theta)=f(x_0+\theta\,v)$ est dérivable en $\theta=0$.
Par exemple, si $v=e_1$, premier vecteur de base, la dérivée de f selon ce vecteur est, quand elle existe, égale à la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ De même pour le vecteur e_2 ; la dérivée correspondante est simplement l’autre dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)$.

Proposition. Si la fonction f est différentiable au point x_0, alors elle est dérivable selon tout vecteur v non nul et on a $\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(x_0 + \theta\, v)\big)(0) = \mathrm{d}f(x_0)\,.\,v$.
Attention la réciproque est fausse en général. Si une fonction est différentiable selon tout vecteur non nul, elle peut très bien ne pas etre différentiable. Par exemple, la fonction déjà vue dans ce chapitre et définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ admet une dérivée selon tout vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^2$. Mais elle n'est pas différentiable à l'origine où elle n'est même pas continue.

- La continuité des dérivées partielles entraîne la différentiabilité

On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et f définie au voisinage de x_0. On suppose les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ définies au voisinage de x_0. On les suppose également continues au point x_0. Alors la fonction f est différentiable au point x_0 et pour tout vecteur test $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{d}f(x_0).\,h = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\, h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\, h_y$.

- Différentielle d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

On étend les résultats précédents sans difficulté à des fonctions vectorielles définies sur $\mathbb{R}^n$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et si f est une une application d'un voisinage $V(x_0)$ de x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, on dit que f est différentiable au point x_0 si d'une part il existe une application linéaire $\mathrm{d}f(x_0)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ($\mathrm{d}f(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$) et si d'autre part il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 de $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ de sorte que $f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0).h + ||h||\; \varepsilon(h)$.
L'application linéaire $\mathrm{d}f(x_0)$ est représentée dans les bases canoniques par une matrice jacobienne $J_f(x_0) \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$ à m lignes et n colonnes de sorte que pour $h \in \mathbb{R}^n$,
$\big(\mathrm{d}f(x_0).h\big)^{\mathrm{t}} = J_f(x_0)\, h^{\mathrm{t}}$. Si on décompose le vecteur $f(x)$ dans la base canonique e_i de $\mathbb{R}^m$, on peut écrire $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)\, e_i$. L'élément générique de la i^{o} ligne $(1 \leq i \leq m)$ et de la j^{o} colonne $(1 \leq j \leq n)$ est donné par $\big(J_f(x_0)\big)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.
Dans l'exemple du début de ce chapitre, on a deux variables ($n = 2$) et une fonction à valeurs scalaires, c'est à dire $m = 1$.

- Différentielle d'une application composée

On se donne trois entiers n, m et p, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $V(x_0)$ un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$,
$f : V(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction définie au voisinage de x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $y_0 = f(x_0)$, $W(y_0)$ un voisinage de y_0 dans $\mathbb{R}^m$ de sorte que $f(V_0) \subset W_0$ et $g : W(y_0) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application définie au voisinage de y_0. Alors l'application composée $g_{\mathrm{o}}f$ est bien définie de $V(x_0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ à l'aide de la relation $(g_{\mathrm{o}}f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pour $x \in V(x_0)$.
On suppose f différentiable au point x_0 et g différentiable au point y_0. On note
$\mathrm{d}f(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $\mathrm{d}g(y_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ les applications différentielles tangentes correspondantes. Alors l'application $g_{\mathrm{o}}f$ est différentiable au point x_0 et l'on a
$\mathrm{d}(g_{\mathrm{o}}f)(x_0) = \mathrm{d}g(y_0)_{\mathrm{o}}\, \mathrm{d}f(x_0)$. Ainsi pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\big(\mathrm{d}(g_{\mathrm{o}}f)(x_0)\big).h = \mathrm{d}g(y_0).(\mathrm{d}f(x_0).h)$.

- Produit de matrices jacobiennes

Notons $J_f(x_0) \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$ la matrice jacobienne de f au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $J_g(y_0) \in \mathscr{M}_{pm}(\mathbb{R})$ la matrice jacobienne de g au point $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^m$. Alors la matrice jacobienne
$J_{g_{\mathrm{o}}f}(x_0) \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$ de la composée $g_{\mathrm{o}}f$ au point x_0 est le produit des matrices jacobiennes :
$J_{g_{\mathrm{o}}f}(x_0) = J_g(y_0)\; J_f(x_0)$.

- Un exemple important

On se donne une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$: $\varphi(t) = (X(t), Y(t))$. La composée $g = f_{\rm o}\varphi$ est telle que $g(t) = f(X(t), Y(t))$. Alors
$g'(t) = {\rm d}f(X(t), Y(t))_{\rm o}\,{\rm d}\varphi(t).1 \;= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{{\rm d}X}{{\rm d}t} \\ \frac{{\rm d}Y}{{\rm d}t} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{{\rm d}X}{{\rm d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{{\rm d}Y}{{\rm d}t}$.

- Calcul pratique de la différentielle de la fonction composée

Si $y = f(x)$, on a ${\rm d}f_k(x) = {\rm d}y_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j}{\rm d}x_j$. D'autre part, $z_\ell = g_\ell(y)$ et ${\rm d}z_\ell = \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_\ell}{\partial y_k}{\rm d}y_k$. Comme $z = (g_{\rm o}f)(x) \;= g(y)$, on calcule ${\rm d}z_\ell$ en remplaçant ${\rm d}y_k$ par l'expression obtenue comme différentielle d'une fonction de x : ${\rm d}z_\ell = \sum_{j=1}^n \big(\sum_{k=1}^m \frac{\partial z_\ell}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\big){\rm d}x_j$ et
$\frac{\partial z_\ell}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_\ell}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$.

- Dérivée seconde et matrice hessienne

On revient au cas fondamental d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f difffentiable au voisinage de x_0. On dispose donc, pour tout $x \in V(x_0)$, de la différentielle ${\rm d}f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. En particulier des deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On dispose donc d'une fonction Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\big)^{\rm t} \in \mathbb{R}^2$. Si cette fonction est à son tour différentiable, on dispose de ${\rm d}\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. La matrice jacobienne associée $H(x) = J_\Phi(x)$ peut s'écrire
$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big) \\ \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$. La matrice $H(x)$ est appelée matrice hessienne de la fonction f

- Théorème de Schwarz d'échange des dérivées partielles

On suppose $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^2$, différentiable au voisinage de x_0 avec des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues dans un voisinage de x_0. On suppose de plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ différentiables au point x_0. Alors on peut échanger l'ordre de dérivation dans les dérivées partielles croisées : $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(x_0) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(x_0)$.
Bien entendu, si les hypothèses de ce théorème ne sont pas satisfaites, il peut être en défaut ! C'est le cas par exemple pour la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Alors $\big(\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)\big)(0,0) = -1$ et $\big(\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)\big)(0,0) = +1$.

- Forme bilinéaire symétrique

Si f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, la différentielle seconde ${\rm d}^2 f(x_0)$ est un forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$: ${\rm d}^2 f(x_0) \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Elle opère sur $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:
${\rm d}^2 f(x_0).(h,k) \in \mathbb{R}$. On la forme en regardant la différentielle de l'application
$x \longmapsto {\rm d}f(x_0).h \in \mathbb{R}$ dans la direction k: ${\rm d}^2 f(x_0).(h,k) = {\rm d}\big({\rm d}f(x_0).h\big).k$.
Si e_i et e_j désignent deux vecteurs de base $\mathbb{R}^n$, ${\rm d}^2 f(x_0).(e_i, e_j) = \big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big)\big)(x_0)$.
Si le théorème de Schwarz s'applique, il exprime que la différentielle seconde est une forme symétrique : ${\rm d}^2 f(x_0).(k,h) = {\rm d}^2 f(x_0).(h,k)$.

- Différentielle d'ordre supérieur

Si la fonctions f et toutes ses dérivées partielles sont continuement différentiables dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la différentielle d'ordre k permet de regrouper l'ensemble des dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}$. On définit alors ${\rm d}^k f.(h_{j_1}\ldots h_{j_k})$ comme une forme linéaire d'ordre k et si e_j désigne un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a ${\rm d}^k f.(e_{j_1}\ldots e_{j_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}$.

Le théorème de Schwarz exprime alors que l'ordre dans lequel on calcule les différentielles importe peu : la forme $(\mathbb{R}^n)^k \ni (h_{j_1} \ldots h_{j_k}) \longmapsto \mathrm{d}^k f.(h_{j_1} \ldots h_{j_k}) \in \mathbb{R}$ est symétrique.

- Formule de Taylor

On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $h \in \mathbb{R}^2$ et f définie au voisinage du segment $[x_0, x_0+h] = \{x = x_0 + \theta h, 0 \leq \theta \leq 1\}$. On suppose f continuement différentiable dans ce voisinage ; les dérivéss partielles premières sont continuement différentiables et les dérivées partielles secondes sont supposées continues. Alors on a la formue de Taylor avec reste intégral : $f(x_0+h) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0).h + \int_0^1 (1-\theta)\, \mathrm{d}^2 f(x_0+\theta h).(h, h)\, \mathrm{d}\theta$.

Si, toutes choses égales par ailleurs, la fonction f est $(n+1)$ fois continuement différentiable au voisnage du segment $[x_0, x_0+h]$, on a la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0).h + \cdots + \frac{1}{k!}\mathrm{d}^k f(x_0).(h, \ldots, h) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x_0).(h, \ldots, h)$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n\, \mathrm{d}^{n+1} f(x_0+\theta h).(h, \ldots, h)\, \mathrm{d}\theta.$$

Exercices

- Fonction quadratique

On se donne un entier n, un vecteur b de $\mathbb{R}^n$ et une matrice réelle carrée A d'ordre n. On rappelle que le produit scalaire usuel (x, y) de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ en fonction des composantes x_j et y_j des vecteurs x et y. Pour x dans $\mathbb{R}^n$, on pose $J(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (b, x)$.

a) Montrer que la fonction J est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et si h désigne un vecteur test de $\mathbb{R}^n$, calculer le nombre dérivé $\mathrm{d}J(x).h$ au point x et dans la direction h.

b) En déduire l'expression de la dérivée partielle $\frac{\partial J}{\partial x_j}$.

- Laplacien en coordonnées cylindriques

Un point du plan (x, y) distinct de l'origine peut être paramétré par des coordonées cylindriques (r, θ) de sorte que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Soit u une fonction deux fois différentiable de (x, y) à valeurs réelles, c'est à dire $u(x, y) \in \mathbb{R}$.

On introduit d'une part le laplacien de u : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et d'autre part la fonction v des variables r et θ de sorte que $v(r, \theta) = u(x, y)$.

Calculer Δu en fonction des dérivées partielles de la fonction v.

- Calcul d'une famille de Laplaciens [avril 2016]

Pour $X \equiv (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$ et α réel, on pose $\varphi(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^\alpha$. Il peut être utile de poser $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

b) En déduire la valeur des dérivées partielles $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

c) On pose $\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$. Calculer $\Delta\varphi$ en fonction de r et de α.

d) Que se passe-il pour $\alpha = 2$?

e) Que se passe-il pour $\alpha = -1$?

• Noyau de l'équation de la chaleur

On se donne $\sigma > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ on pose $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2 t}} \exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2 t})$.

a) Vérifier que la fonction φ est solution de l'équation de la chaleur à une dimension spatiale : $\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \sigma^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

On se donne maintenant un entier m et si $x \in \mathbb{R}^m$, on pose $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$. Si ψ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^m$, on rappelle que le laplacien $\Delta\psi$ de cette fonction est défini par $\Delta\psi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}$. Pour $t > 0$ on pose $\psi(x,t) = \big(\frac{1}{4\pi\sigma^2 t}\big)^{m/2} \exp\big(-\frac{|x|^2}{4\sigma^2 t}\big)$.

b) Montrer qu'alors la fonction ψ est solution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^m$: $\frac{\partial\psi}{\partial t} - \sigma^2 \Delta\psi = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^m$ et $t > 0$.

• Un "contre-exemple" classique en thermodynamique

On se donne une fonction f assez régulière définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ et la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$. On suppose qu'on peut résoudre cette équation et toujours définir l'une des coordonnées en fonction des deux autres ; il existe des fonctions $X(y,z)$, $Y(z,x)$ et $Z(x,y)$ de sorte que si le point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ vérifie $f(x,y,z) = 0$, on a $x = X(y,z)$, $y = Y(z,x)$ et $z = Z(x,y)$.

Montrer qu'on a l'dentité suivante entre dérivées partielles : $\frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial x} = -1$.

• Champs de vecteurs [avril 2016]

Pour $X \equiv (x,y)$ vecteur de $\mathbb{R}^2$, on introduit le champ de vecteurs φ défini par $\varphi(x,y) = \big(\varphi_x(x,y)\,,\, \varphi_y(x,y)\big) = \big((x^2+y^2)\,x\,,\,(x^2+y^2)\,y\big)$.

a) Calculer la divergence $\mathrm{div}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial y}$ en fonction de x et y et éventiellement de r défini par $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Soit R un nombre réel strictement positif et Ω le disque de centre l'origine et de rayon R : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le R^2\}$.

b) Déduire de la question précédente le calcul de l'intégrale $I = \int_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

c) Proposer une autre méthode pour calculer facilement l'intégrale I.

d) Vérifier la cohérence de vos résultats.