le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 10 Convergence dominée

- Théorème de convergence dominée

On se donne un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et une fonction positive mesurable g qui est de plus intégrable : $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, c'est à dire $\int_X g\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Soit $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions numériques mesurables définies sur X et qui converge simplement vers une fonction f : $\forall x \in X,\ f_k(x) \longrightarrow f(x)$ si $k \longrightarrow \infty$. On suppose que cette convergence est dominée : pour tout $x \in X$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_k(x)| \leq g(x)$. Alors la fonction mesurable f est également intégrable : $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, les intégrales de la valeur absolue des écarts entre f_k et la limite f tendent vers zéro : $\int_X |f - f_k|\,\mathrm{d}\mu \longrightarrow 0$ et la limite des intégrales est égale à l'intégrale de la limite : $\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$. Le théorème de convergence dominée donne des conditions suffisantes pour échanger les symboles de passage à la limite et d'intégration.

Par exemple, la suite de fonctions $f_n(x) = \exp(-nx)\,\frac{\sin x}{x}$ est dominée par $g(x) = \exp(-x)$: $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme la suite $f_n(x)$ converge simplement vers zéro sauf en zéro où on a toujours $f_n(0) = 1$, l'intégrale $\int_0^\infty \exp(-nx)\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ tend vers zéro si l'entier n tend vers l'infini.

Autre exemple. La suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$ converge simplement vers la fonction nulle si $0 \leq x < 1$. Elle est dominée par $g(x) = 1$ qui est intégrable sur $[0, 1]$.

- Classes de fonctions égales presque partout

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des valeurs où ces fonctions diffèrent est de mesure nulle, c'est à dire si
$\mu(\{x \in X, f(x) \neq g(x)\}) = 0$, on dit que les fonctions f et g sont égales μ-presque partout et on le note souvent $f(x) = g(x)\ \ \mu\,\mathrm{pp}(x)$. Essentiellement, les fonctions f et g sont égales, au moins pour tout ce qui concerne leur intégration à l'aide de la mesure μ.

- Equivalence de fonctions

En gardant le contexte d'un ensemble mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, on dit que les fonctions f et g de X dans $\mathbb{R}$ sont équivalentes si et seulement si elles sont égales presque partout pour la mesure μ. La classe d'équivalence $\widetilde{f}$ de la fonction mesurable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est composée de toutes les fonctions g égales à f presque partout.

Si $g \in \widetilde{f}$ et si $\int_X |g|\,\mathrm{d}\mu < \infty$, alors l'intégrale $\int_X \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu$ a un sens : c'est un nombre réel bien défini qui ne dépend pas du représentant choisi dans la classe $\widetilde{f}$ de la fonction f. On note alors $\widetilde{f} \in \mathrm{L}^1(\mu)$ le fait que la classe de la fonction f est intégrable.

On néglige le plus souvent dans la suite la différence entre une fonction f et la classe $\widetilde{f}$ des fonctions égales à la fonction f presque partout. Les objets naturels en intégration de Lebesgue

François Dubois, novembre 2019.

sont des fonctions définies presque partout au sens de la mesure μ, et non les applications de X dans $\mathbb{R}$. Il suffit que la mesure de l'ensemble où la fonction f n'est pas définie soit nulle.

- Tribu complétée

On complete la tribu $\mathscr{T}$ afin de rendre mesurables deux parties A et B qui ne font pas partie de la tribu initiale $\mathscr{T}$ mais telles que telles que la mesure d'une partie mesurable qui majore leur différence est nulle. On a la proposition suivante.
Tribu et mesures complétées. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. On pose
$\mathscr{T}^* = \{A \subset X, \exists A_-, A_+ \in \mathscr{T}, A_- \subset A \subset A_+, \mu(A_+ \backslash A_-) = 0\}$. De plus, si $A \in \mathscr{T}^*$,
$\mu^*(A) = \mu(A_-) = \mu(A_+)$. Alors la famille $\mathscr{T}^*$ est une tribu sur l'ensemble X et μ^* est une mesure définie sur la tribu $\mathscr{T}^*$.

- Nouvel énoncé du théorème de convergence dominée

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un ensemble mesuré et f_k une suite de fonctions mesurables telles que
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_X |f_k| \, \mathrm{d}\mu \right) < \infty$. Alors pour presque tout $x \in X$, l'expression $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ définit un nombre réel $f(x)$. De plus, on a $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu$.

- Convergence dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mu)$

On se donne un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Une suite de (classes de) fonctions $f_k \in \mathrm{L}^1(\mu)$ converge vers la classe de fonctions $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ si et seulement si la suite des intégrales
$\int_X |f_k - f| \, \mathrm{d}\mu$, qui a un sens car elle ne dépend pas des représentants choisis, tend vers zéro si k tend vers l'infini.
On note $\| f \| \equiv \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$ la norme d'une (classe de) fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$.

- Théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale

On suppose que l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue dx. On se donne un ensemble mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et une fonction mesurable $X \times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ telle que
(i) $\forall y \in \mathbb{R}$, la fonction $X \ni x \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ est intégrable
(ii) pp $(x \in X)$, la fonction $\mathbb{R} \ni y \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue.
(iii) il existe une fonction $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable ($\int_X g(x) \, \mathrm{d}\mu < \infty$) telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, et pp$(x \in X)$, $|f(x, y)| \leq g(x)$.
Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(y) = \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu$. Alors la fonction Φ est une fonction continue de la variable y.

- Théorème de dérivabilité sous le signe “somme”

On se place dans le cadre des hypothèses du théorème précédent. On suppose de plus
(iv) pp $(x \in X)$, la fonction $\mathbb{R} \ni y \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
(v) il existe une fonction $g_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable ($\int_X g_1(x) \, \mathrm{d}\mu < \infty$) telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pp$(x \in X)$, $| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) | \leq g_1(x)$.
Alors la fonction Φ définie par l'intégrale $\Phi(y) = \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu$ est dérivable par rapport à $y \in \mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left(\int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu \right) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, \mathrm{d}\mu$.
Si les hypothèses (i) à (v) sont satisfaites, on peut échanger dérivation par rapport à une variable et intégration par rapport à une autre. On n'oublie pas pour la suite que le point clef pour l'échange des symboles de dérivation par rapport à y et d'intégration par rapport à x est de vérifier que la série dérivée par rapport a y est effectivement dominée, c'est à dire

$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq g_1(x)$, ce pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pp$(x \in X)$.

- Application aux séries entières

On applique le résultat précédent au cas discret. On choisit $X = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ et pour mesure μ la mesure de comptage. On prend $f_k(y) = \frac{1}{k}\, y^k$ si $k \geq 1$ et $|y| \leq \theta < 1$. Alors $|\frac{\partial f_k}{\partial y}| \leq \theta^{k-1}$. La fonction (la suite !) $X \ni k \longmapsto \theta^{k-1}$ est intégrable pour la mesure de comptage puisque c'est le terme général d'une série à termes positifs convergente. Les autres hypothèses sont laissées au lecteur. Donc la somme de la série $\Phi(y) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\, y^k$ peut être dérivée sous le signe de sommation et $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dy}} = \sum_{k\geq 1} y^{k-1}$. Comme on a le calcul élémentaire $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dy}} = \frac{1}{1-y}$ et qu'on a clairement $\Phi(0) = 0$, il vient par une simple intégration
$\Phi(y) = -\log(1-y)$.

- Attention aux intégrales semi-convergentes

Si $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = +\infty$, l'intégrale de la fonction f n'est pas définie au sens de Lebesgue. Pourtant, il arrive que la limite de $\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ existe si A tend vers l'infini. On dit alors que l'intégrale est semi-convergente. Elle n'a pas de sens dans la théorie de Lebesgue mais c'est la manière usuelle dont on définit une "intégrale généralisée" dans une approche élémentaire.
Par exemple, si $f(x) = \sin x/x$, on peut montrer que $\int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x = +\infty$ en montrant que la série de terme génétal $u_k = \int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverge et établir que $\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ existe en étudiant la série de terme général $v_k = \int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ qui est elle absolument convergente.

Exercices

- La "bosse glissante"

On se donne la suite de fonctions suivante : $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$.

a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

b) La suite de fontions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle avoir une limite dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$? On pourra montrer que cette suite n'est pas une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

c) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Fourier avant l'heure

Pour f fonction dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \exp(-it\,\omega)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que g appartent à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ et qu'on a $||g||_\infty \leq ||f||_1$.

b) Montrer que la fonction g est une fonction continue de la variable ω.

c) Dans le cas où $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, montrer que la fonction g est dérivable et calculer $g'(\omega)$ à l'aide d'une intégrale.

d) Peut-on dériver la fonction g une seconde fois dans ce cas ?

- Savoir dériver, et savoir s'arrêter !

Pour θ nombre réel arbitraire, on pose $f(\theta) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^5} \sin k\theta$.

a) Pourquoi la relation précédente définit-elle bien un nombre réel ?

b) A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la fonction f est une fonction continue de la variable θ.

c) Montrer que f est dérivable et préciser l'expression de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}$ à l'aide d'une série.

d) Même question pour f''.
e) Même question pour f'''.
f) Le théorème de convergence dominée permet-il de définir simplement $f^{(4)}(\theta)$, dérivée quatrième de la fonction f ?

• Dérivation d'une intégrale [février 2014]
Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t\,x)}{t^4}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, la relation $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t\,x)}{t^4}\,\mathrm{d}t$ définit bien un nombre réel $f(x)$.
b) A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la fonction f est continue. On justifiera avec soin l'utilisation d'un résultat du cours qui devra aussi être énoncé avec précision.
c) Montrer que la fonction f est dérivable et préciser l'expression de la dérivée $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
d) Reprendre les questions b) et c) en s'intéressant cette fois à la dérivée de la fonction dérivée. En déduire une expression de la dérivée seconde $f''(x)$ à l'aide d'une intégrale.
e) Que peut-on dire de la dérivée troisième de la fonction f ?

• Dérivation d'une série [avril 2014, avril 2016]
Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\,x)}{k^4}$.
a) Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, la relation $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\,x)}{k^4}$ définit bien un nombre réel $f(x)$.
b) A l'aide d'un résultat du cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que la fonction f est continue.
c) Montrer que la fonction f est dérivable et préciser l'expression de la dérivée $f'(x)$ à l'aide d'une série.
d) Reprendre les questions b) et c) en s'intéressant cette fois à la dérivée de la fonction dérivée. En déduire une expression de la dérivée seconde $f''(x)$ à l'aide d'une série.
e) Que peut-on dire de la dérivée troisième de la fonction f ?
f) Reprendre les questions a) à e) en remplaçant la fonction f par la fonction g définie par $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\,x)}{k^4}$.