le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 11 Théorèmes de Tonelli et de Fubini

- Fonctions intégrables

On se donne un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et une fonction f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ qu'on suppose intégrable : $f \in \mathrm{L}^1(X)$. On a donc $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Alors μ-presque partout (pour tout $x \in X$ sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle), l'intégrale $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ est un nombre réel et on a $|\int_X f \,\mathrm{d}\mu| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.
Dans cette leçon, nous prenons $X = \mathbb{R}^2$ avec pour tribu $\mathscr{T}$ la tribu $\mathscr{B}_2$ des boréliens et la mesure de Lebesque $\mu = m_2$ ou bien $X = \mathbb{R}$ avec la tribu des boréliens $\mathscr{B}_1$ et la mesure de Lebesque $\mu = m_1$ sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour $a < b$ et $c < d$, on a $m_1(]a, b[) = b - a$ et $m_2(]a, b[\times]c, d[) = (b - a)\,(d - c)$.

- Fonctions partielles

On consideȑe une fonction mesurable f définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. On fixe $x \in \mathbb{R}$. On note f_x la fonction partielle "à x fixé" telle que $f_x(y) = f(x, y)$. De même, on note f^y la fonction partielle "à y fixé" et on a $f^y(x) = f(x, y)$. Alors les fonctions f_x et f^y sont mesurables comme fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la tribu des Boréliens.

- Théorème de Tonelli

On se donne f mesurable positive définie sur $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) \geq 0$. On pose
$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\,\mathrm{d}y$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^y(x)\,\mathrm{d}x$ pour $y \in \mathbb{R}$.
Alors les fonctions φ et ψ sont mesurables de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ et on a
$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\,\mathrm{d}y$. On peut aussi exprimer ce résultat sous la forme :
$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x, y) \right] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x, y) \right] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Si on a $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x, y) \right] = +\infty$, alors on a également $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x, y) \right] = +\infty$ et l'intégrale double $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ vaut $+\infty$. Si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x, y) \right]$ est finie, c'est à dire est un nombre réel positif, ce que l'on note par $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x, y) \right] < \infty$, alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x, y) \right]$ est finie également et ces deux intégrales ont la même valeur numérique qui est aussi la valeur de l'intégrale double $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

- Exemple : surface du triangle unité

On se donne le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Pour calculer la surface $|T|$ de ce triangle, on intègre la fonction caractéristique χ_T définie par $\chi_T(x, y) = 1$ si $(x, y) \in T$ et $\chi_T(x, y) = 0$ sinon. On a alors $\varphi(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ alors que pour $0 \leq x \leq 1$, on a $\varphi(x) = 1 - x$. Dans ce cas précis, on observe [exercice !] que l'on a pour tout réel y, $\psi(y) = \varphi(y)$. On a alors $|T| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_T(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

François Dubois, novembre 2019.

• Théorème de Fubini

On se donne f mesurable de signe quelconque définie sur $\mathbb{R}^2$. On pose $\varphi^*(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x,\, y)|\, \mathrm{d}y$. C'est une fonction mesurable positive. On suppose que son intégrale est finie : $\int_{\mathbb{R}} \varphi^*(x)\, \mathrm{d}x \,=\, \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \big[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, |f(x,\, y)| \big] \,<\, \infty$. Alors $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ et presque partout ($x \in \mathbb{R}$), les fonction f_x et f^x appartiennent à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, les fonctions $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,\, y)\, \mathrm{d}y$ et $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x$ sont définies presque partout et on a $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \big[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x,\, y) \big] \,=\, \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \big[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x,\, y) \big] \,=\, \int_{\mathbb{R}^2} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

En pratique, si on veut calculer l'intégrale double avec des intégrales simples "dans l'ordre que l'on veut", on doit d'abord vérifier que la fonction f est intégrable, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,\, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$. Le théoreme de Tonelli permet alors d'évaluer l'intégrale de cette fonction positive et de savoir si f est intégrable ou pas.

• "Contre-exemple" au théorème de Fubini

On pose $f(x,\, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $0 \leq x,\, y \leq 1$ et on tente de calculer les deux intégrales $\int_0^1 \mathrm{d}x\, [\int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,\, y)]$ et $\int_0^1 \mathrm{d}y\, [\int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x,\, y)]$. On remarque que $\frac{\partial}{\partial y} \big(\frac{y}{x^2+y^2} \big) \,=\, \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ et pour x entre 0 et 1, on a $\int_0^1 f(x,\, y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}$. On en déduit la valeur de $\frac{\pi}{4}$ pour l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{d}x\, [\int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,\, y)]$. De façon quasi-identique, on a $\frac{\partial}{\partial x} \big(\frac{-x}{x^2+y^2} \big) \,=\, \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ et $\int_0^1 f(x,\, y)\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{1+y^2}$. On en déduit la valeur de $-\frac{\pi}{4}$ pour l'intégrale $= \int_0^1 \mathrm{d}y\, [\int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,\, y)]$ et le théorème de Fubini semble en défaut !

Si on prend le soin de vérifier l'hypothèse du théorème de Fubini, on calcule d'abord l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,\, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. On peut le faire avec le théorème de Tonelli qui s'applique pout toute fonction positive ! On a $\int_{[0,\, 1]^2} |f(x,\, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \,=\, \int_0^1 \mathrm{d}x\, [\int_0^1 \mathrm{d}y\, |\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}|]$. Il faut faire attention au changement de signe de la fonction f. Pour x fixé dans l'intervalle $[0,\, 1]$, on a $\int_0^1 |\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}|\, \mathrm{d}y \,=\, \int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}y \,+ \int_x^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}y \,=\, [\frac{y}{x^2+y^2}]_{y=0}^{y=x} \,-[\frac{y}{x^2+y^2}]_{y=x}^{y=1} \,=\, \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$. On a donc $\int_{[0,\, 1]^2} |f(x,\, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = +\infty$ et la fonction f de cet exemple n'est pas intégrable ! On retiendra que si l'on ne satisfait pas aux hypothèses du théorème de Fubini, on manipule une "intégrale double" qui n'est en fait qu'une suite de symboles sans signification mathématique dans le cadre de la théorie de Lebesgue.

• Changement de variable dans une intégrale double : premiers pas

On se donne pour fixer les idées le carré unité $\widehat{Q} = [0,\, 1] \times [0,\, 1]$ et deux réels strictement positifs a et b. Avec la transformation linéaire F définie par $x = a\widehat{x},\; y = b\widehat{y}$, le carré unité se transforme en un rectangle $Q = [0,\, a] \times [0,\, b]$. Si on intègre la fonction $f \equiv 1$ sur le rectangle Q, on trouve $|Q| = \int_Q \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = ab$ alors que si on intègre cette même fonction $f \equiv 1$ sur le carré $\widehat{Q}$, on trouve $|\widehat{Q}| = \int_{\widehat{Q}} \mathrm{d}\widehat{x}\, \mathrm{d}\widehat{y} = 1$. On introduit la matrice (constante) J_F de l'application linéaire F : $J_F = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Son déterminant $\det J_F$ vaut ab et on constate qu'on a $\int_Q \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q}} \det J_F\, \mathrm{d}\widehat{x}\, \mathrm{d}\widehat{y}$.

• Changement de variable dans une intégrale double : un premier parallélogramme

On transforme la carré unité $\widehat{Q}$ avec une transformation linéaire F définie maintenant par $x = a\widehat{x} + c\widehat{y},\; y = b\widehat{y}$. Alors le carré unité se transforme en un parallélogramme Q dont on peut donner les coordonnées des quatre sommets : $\mathrm{O}(0,\, 0)$ $[\widehat{x} = \widehat{y} = 0]$, $\mathrm{A}(a,\, 0)$ $[\widehat{x} = 1,\, \widehat{y} = 0]$, $\mathrm{B}(a+c,\, b)$ $[\widehat{x} = \widehat{y} = 1]$ et $\mathrm{C}(c,\, b)$ $[\widehat{x} = 0,\, \widehat{y} = 1]$. La surface du parallélogramme Q est égale a sa base multipliée par la hauteur, soit ab. Par ailleurs, la matrice J_F de l'application linéaire F vaut maintenant $J_F = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Son déterminant $\det J_F$ vaut toujours ab et on a encore $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q}} \det J_F \,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$.

• Changement de variable dans une intégrale double : un second parallélogramme

On pose maintenant le changement de variables $(\widehat{x}, \widehat{y}) \longmapsto (x, y)$ *via* l'application linéaire F définie par $x = a\widehat{x} + c\widehat{y}$, $y = d\widehat{x} + b\widehat{y}$, avec a, b, c et d strictement positifs pour fixer les idées. Alors le carré unité $\widehat{Q}$ se transforme en un autre parallélogramme Q. Les coordonnées de ses quatre sommets sont les suivantes : $\mathrm{O}(0, 0)$ $[\widehat{x} = \widehat{y} = 0]$, $\mathrm{A}(a, d)$ $[\widehat{x} = 1, \widehat{y} = 0]$, $\mathrm{B}(a+c, b+d)$ $[\widehat{x} = \widehat{y} = 1]$ et $\mathrm{C}(c, b)$ $[\widehat{x} = 0, \widehat{y} = 1]$. Si le quadrangle $OABC$ a une orientation directe (il tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) [nous conseillons au lecteur de faire un dessin !], alors la surface du parallélogramme Q se calcule avec une approche graphique [exercice !] et on a $|Q| = ad - bc$. Si le quadrangle $OABC$ a une orientation rétrograde [nous conseillons au lecteur de faire un autre dessin !], alors on voit que $|Q| = -ad + bc$. Dans tous les cas, $|Q| = |ad - bc|$. La matrice J_F de l'application linéaire F vaut maintenant $J_F = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ et $\det J_F = ad - bc$. On remarque que pour calculer la surface de ce second parallélogramme, il suffit d'écrire $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q}} |\det J_F| \,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$.

Ce résultat se généralise [exercice !] si on remplace le carré unité par tout autre carré de côté $\Delta x > 0$.

• Changement de variable dans une intégrale double : quadrangle curviligne

On transforme le carré unité $\widehat{Q} = [0, 1] \times [0, 1]$ avec une application non linéaire Φ qu'on suppose de classe $\mathscr{C}^1$, bijective de $\widehat{Q}$ sur $Q = \Phi(\widehat{Q})$ et on suppose l'application réciproque Φ^{-1} continue de Q sur $\widehat{Q}$. On découpe le carré $\widehat{Q}$ en $N \times N$ petits carrés $\widehat{Q_{i,j}}$ de côté $\Delta x = \frac{1}{N}$: $\widehat{Q_{i,j}} = [\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1}] \times [\widehat{y}_j, \widehat{y}_{j+1}]$, avec $\widehat{x}_i = (i-1)\,\Delta x$ et $\widehat{y}_j = (j-1)\,\Delta x$. On pose $Q_{i,j} = \Phi(\widehat{Q_{i,j}})$. On a alors $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{1 \leq i,\, j \leq N} \int_{Q_{i,j}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{1 \leq i,\, j \leq N} \int_{\Phi(\widehat{Q_{i,j}})} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. On approche l'application Φ dans le carré $\widehat{Q_{i,j}}$ par une application affine tangente $F_{i,j}$ au point $(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j)$: $\Phi(\widehat{x}, \widehat{y}) \approx F_{i,j}(\widehat{x}, \widehat{y}) \equiv \Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j) + \mathrm{d}\Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j).(\widehat{x} - \widehat{x}_i, \widehat{y} - \widehat{y}_j)$. Alors on peut approcher avec une bonne précision l'aire du quadrangle curviligne $Q_{i,j}$ par celle du parallélogramme $\widetilde{Q_{i,j}} = F_{i,j}(\widehat{Q_{i,j}})$ obtenu en remplaçant Φ par $F_{i,j}$: $\int_{\Phi(\widehat{Q_{i,j}})} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \int_{\widetilde{Q_{i,j}}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Mais on a vu que pour un parallélogramme $\widetilde{Q_{i,j}}$ quelconque, on a $\int_{\widetilde{Q_{i,j}}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q_{i,j}}} |\det J_{F_{i,j}}| \,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$. Dans le cas présent, $J_{F_{i,j}} = \mathrm{d}\Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j)$ et on a $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{1 \leq i,\, j \leq N} \int_{\widehat{Q_{i,j}}} |\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j)| \,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$.

Si l'entier N tend vers l'infini, la dernière intégrale converge vers $\int_{\widehat{Q}} |\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x}, \widehat{y})| \,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$ et on a finalement $|Q| = \int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q}} |\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x}, \widehat{y})| \,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$.

• Changement de variable dans une intégrale double : cas général

Comme ci-dessus, on transforme le carré unité $\widehat{Q} = [0, 1] \times [0, 1]$ avec une fonction non linéaire Φ de classe $\mathscr{C}^1$, bijective de $\widehat{Q}$ sur $Q = \Phi(\widehat{Q})$ et l'application réciproque est supposée continue de Q sur $\widehat{Q}$. On se donne maintenant une fonction f intégrable au sens de Riemann dans Q et on cherche à écrire l'intégrale $\int_Q f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec une intégrale dans le carré $\widehat{Q}$.

On reprend les notations du paragraphe précédent et on pose $f_{i,j} = f(\Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j))$: c'est une approximation de la fonction f dans le (petit) quadrangle curviligne $Q_{i,j}$. On a alors

$\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{1\le i,\,j\le N} \int_{Q_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{1\le i,\,j\le N} \int_{\Phi(\widehat{Q_{i,j}})} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$
Pour chaque quadrangle curviligne $Q_{i,j}$, on a $\int_{\Phi(\widehat{Q_{i,j}})} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx f_{i,j} \int_{\Phi(\widehat{Q_{i,j}})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et on a vu au paragraphe précédent que $\int_{\Phi(\widehat{Q_{i,j}})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \int_{\widehat{Q_{i,j}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q_{i,j}}} |\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j)|\,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$. On en déduit que $\int_{\Phi(\widehat{Q_{i,j}})} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \sum_{1\le i,\,j\le N} \int_{\widehat{Q_{i,j}}} f(\Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j))\,|\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j)|\,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$. Si l'entier N tend vers l'infini, cette dernière somme converge vers l'intégrale
$\int_{\widehat{Q}} f(\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\,|\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|\,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$. La forme finale de la formule de changement de variable dans une intégrale double est la suivante : $\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q}} f(\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\,|\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|\,\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}$. Le tout est de ne pas oublier le jacobien $J(\widehat{x},\widehat{y}) \equiv |\det \mathrm{d}\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|$, valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne $\mathrm{d}\Phi(\widehat{x},\widehat{y})$!
On admet que le résultat précédent se généralise au cas d'un ouvert quelconque $\widehat{Q}$ de $\mathbb{R}^n$ pour un entier n quelconque ≥ 1 et une fonction f mesurable sur $Q = \Phi(\widehat{Q})$ et intégrable sur Q, c'est à dire telle que $\int_Q |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$. A titre d'exercice, le lecteur peut chercher à retrouver la formule "usuelle" d'intégration par parties dans le cas de la dimension un, comme cas particulier de la relation précédente !

- Cordonnées polaires dans le plan

Les variables $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ sont notées r et θ et l'application Φ de changement de variable $(r,\theta) \longmapsto (x,y)$ est définie par $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. La matrice jacobienne de cette transformation peut se calculer sans difficulté particulière et on a, si on suppose $r > 0$:
$J(r,\theta) = r$. On a alors $\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{Q}} f(r\cos, r\sin\theta)\; r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ lorsque $Q = \Phi(\widehat{Q})$.

- Un exemple classique : l'intégrale de Gauss

On cherche à calculer l'intégrale $G = \int_0^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$. Cette intégrale est convergente car la gaussienne $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(-x^2) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue et pour $x \ge 1$,
$0 \le \exp(-x^2) \le \exp(-x)$, et l'exponentielle décroissante est intégrable sur l'intervalle $[1, \infty($.
L'idée est d'introduire l'intégrale double $I = \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \exp(-x^2)\exp(-y^2)$ et de la calculer de deux façons. D'une part, $I = G^2$ et d'autre part, on peut évaluer l'intégrale I sans difficulté majeure en passant en coordonnées polaires. On a
$I = \int_0^\infty r\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \exp(-r^2) = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \exp(-r^2)\,\mathrm{d}\big(\frac{r^2}{2}\big) = \frac{\pi}{4}$. Comme l'intégale de Gauss G est positive, on a finalement $G = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercices

- Calcul d'une intégrale double

On introduit le triangle T du plan défini par les inégalités $x \ge 1$, $y \ge 1$, $x + y \le 4$.
Montrer que $\int_T \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^4} = \frac{1}{48}$.

- Intégrale de Gauss

Montrer que $\int_{-\infty}^{-\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

- Convolution discrète

On suppose que la série série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ est absolument convergente. Pour n et m entiers positifs ou nuls, on pose $v_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} a_k\, a_{k+n}$.

a) Montrer que pour n fixé, la suite $v_{n,m}$ converge si m tend vers $+\infty$. On pourra utiliser le critère de Caucly : pour tout entier M et si l'entier m est assez grand, la différence $|v_{n,m+M} - v_{n,m}|$ est arbitrairement petite.
b) En déduire que la suite limite de terme général $u_n \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, a_{k+n}$ est bien définie.
c) Montrer que la suite u_n tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.
d) Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.

• Ne pas oublier ce que l'on sait déjà !
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
a) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty |f(x)| \, \mathrm{d}x$ est infinie.
b) La fonction f est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $]0, +\infty[$?
c) Comment peut-on définir l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$?

• L'exponontielle est un morphisme
On rappelle que la fonction exponentielle e^x est définie par la série $\mathrm{e}^x \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$.
Montrer que l'on a $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^y$.