le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 12 Compléments de calcul intégral

- Introduction

On se donne deux nombres réels a et b de sorte que $a < b$. On rappelle d'abord que la relation classique $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = fb) - f(a)$ peut s'écrire en introduisant la normale extérieure $n(x)$ aux deux points a et b de la frontière $\partial[a,b]$ de l'intervalle $[a,b]$: $n(a) = -1$ et $n(b) = +1$. Alors $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \sum_{x\in\partial[a,b]} f(x)\,n(x)$.

- Intégration par parties dans le plan

Dans le cas de deux dimensions, on se donne une partie ouverte et bornée Ω du plan $\mathbb{R}^2$: elle est incluse dans un rectangle suffisamment grand. On suppose que la frontière, le bord $\partial\Omega$ de Ω est une courbe assez régulière, qu'on note aussi Γ. On introduit l'adhérence $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ de Ω, réunion de Ω et de son bord $\partial\Omega$. Pour un point $x \in \partial\Omega$ du bord de Ω, on note $n(x)$ le vecteur normal orienté qui pointe vers l'extérieur de Ω. On rappelle que $n(x)$ est un vecteur unitaire et que le point x est un point quelconque du bord. On se donne enfin une application régulière f définie sur l'adhérence $\overline{\Omega}$: $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors le théorème d'intégration par parties exprime que l'intégrale d'une dérivée de la fonction f dans le domaine Ω se réduit à une intégrale curviligne sur le bord $\partial\Omega$ du domaine : $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\,n_x\,\mathrm{d}s$ et $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\,n_y\,\mathrm{d}s$. On exprime cette propriété de façon synthétique sous la forme $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\,n_j\,\mathrm{d}s$ pour les deux composantes $(j = 1, 2)$, ou même, avec $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\iint_\Omega \partial_j f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\,n_j\,\mathrm{d}s$. Rappelons que l'intégrale $\int_{\partial\Omega}(f\,n_j)\,\mathrm{d}s$ est une intégrale curviligne qui se calcule à l'aide d'un paramétrage de la courbe Γ. Si $[a,b] \ni t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$ est une fonction régulière qui définit les points $M(t)$ de la courbe fermée Γ, on a $M(a) = M(b)$. De plus, l'élément de longueur $\mathrm{d}s$ est donné par la relation $\mathrm{d}s = \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \|\,\mathrm{d}t$ et
$\int_{\partial\Omega} f\,n_j\,\mathrm{d}s = \int_a^b (f\,n_j)(M(t))\,\| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \|\,\mathrm{d}t$.

- Intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs

On peut combiner ces deux relations en introduisant un champ de vecteurs
$\Phi : \overline{\Omega} \ni (x,y) \longmapsto \Phi(x,y) \equiv (\Phi_x, \Phi_y) \in \mathbb{R}^2$ régulier sur l'adhérence de Ω. La divergence du champ de vecteurs Φ est par définition le champ scalaire $\mathrm{div}\,\Phi$ défini par $\mathrm{div}\,\Phi \equiv \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}$. Si on note exceptionnellement avec un point le produit scalaire $\Phi.n \equiv \Phi_x\,n_x + \Phi_y\,n_y$ le long de la frontière, les deux relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme
$\iint_\Omega \mathrm{div}\,\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega}(\Phi.n)\,\mathrm{d}s$.

- Intégrale de surface

On se donne quatre nombres réels $a < b$, $c < d$ et un espace $\mathbb{R}^2$ des paramètres (u,v) de sorte que $a \le u \le b$ et $c \le v \le d$. On définit la nappe paramétrée Σ de l'espace $\mathbb{R}^3$ par une fonction continûment différentiable Φ du rectangle $\widehat{\Sigma} \equiv [a,b] \times [c,d]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. La

François Dubois, janvier 2020.

nappe paramétrée Σ est définie par la relation $\Sigma = \Phi(\widehat{\Sigma})$. On suppose que la famille $(\frac{\partial \Phi}{\partial u},\, \frac{\partial \Phi}{\partial v})$ est libre. Le plan tangent à la nappe paramétrée Σ au point $M = \Phi(u,\, v)$ est le plan affine qui passe par M avec un plan vectoriel associé qui admet pour base la famille des deux vecteurs $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\, v)$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,\, v)$. Alors le produit vectoriel $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,\, v)$ est non nul. La norme $\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,\, v) \|$ de ce produit vectoriel est égale à la surface du parallélogramme construit à l'aide des deux vecteurs tangents $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\, v)$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,\, v)$. On définit le vecteur normal $n(u,\, v)$ comme le vecteur unitaire construit à partir de ce produit vectoriel :
$n(u,\, v) = \frac{1}{\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \|} \, \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,\, v)$. C'est un vecteur orthogonal au plan tangent.
On se donne une fonction f définie sur une nappe paramétrée Σ. On définit l'intégrale de surface $\int_\Sigma f(M)\, \mathrm{d}\sigma$ par la relation $\int_\Sigma f(M)\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{\widehat{\Sigma}} f(\Phi(u,\, v))\, \|(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v})(u,\, v)\|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$. Elle ne dépend pas du paramétrage choisi. Dans le cas où $f(M) \equiv 1$, on calcule ce cette façon la valeur $|\Sigma|$ de l'aire de la surface Σ: $\int_\Sigma \mathrm{d}\sigma = |\Sigma|$.

- Intégration par parties d'une intégrale triple

On se donne un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^3$ qui a pour frontière une surface $\Sigma \equiv \partial\Omega$ assez régulière. La normale extérieure $n(x)$ à Ω est définie sur la surface Σ comme la normale choisie telle qu'elle pointe vers l'extérieur du volume Ω. On a alors une relation d'intégration par parties très analogue au cas de la dimension deux. Si f est une application régulière définie sur l'adhérence $\overline{\Omega}$, le théorème d'intégration par parties exprime que l'intégrale d'une dérivée de la fonction f dans le domaine Ω se réduit à une intégrale de surface sur le bord $\partial\Omega$:
$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} f\, n_j\, \mathrm{d}\sigma$ pour les trois composantes ($j = 1,\, 2,\, 3$), c'est à dire
$\int_\Omega \partial_j f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega} f\, n_j\, \mathrm{d}\sigma$.

- Intégrale d'une divergence

La relation s'écrit de façon très analogue au cas de la dimension deux. On a cette fois :
$\Phi\colon\ \overline{\Omega} \ni (x,\, y,\, z) \longmapsto \Phi(x,\, y,\, z) \equiv (\Phi_x,\, \Phi_y,\, \Phi_z) \in \mathbb{R}^3$ régulier sur l'adhérence de Ω. La divergence du champ de vecteurs Φ est le champ scalaire défini par la relation
$\mathrm{div}\, \Phi \equiv \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$. Si on note $\Phi.n \equiv \Phi_x n_x + \Phi_y n_y + \Phi_z n_z$ le produit scalaire le long de la frontière, les trois relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme
$\iiint_\Omega \mathrm{div}\, \Phi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} (\Phi.n)\, \mathrm{d}\sigma$.

- Intégration par parties du flux d'un rotationnel

On se donne une surface Σ. Son bord $\Gamma = \partial\Sigma$ est une courbe fermée. Si on se donne une orientation le long de Γ, donc un vecteur unitaire tangent τ, on définit naturellement dans l'espace euclidien orienté une direction pour le vecteur normal n défini en tout point de la surface Σ. Si on change l'orientation le long de la courbe Γ, c'est à dire le signe de τ, on doit simplement changer le signe du vecteur normal n sur la surface Σ.
On considère maintenant un champ de vecteurs continûment différentiable φ défini de l'espace E_3 dans lui-même. On rappelle que le rotationnel $\mathrm{rot}\, \varphi$ du champ de vecteurs φ est lui aussi un champ de vecteurs, c'est à dire une application de l'espace E_3 dans lui-même. Ses composantes $(\mathrm{rot}\, \varphi)_i$ sont données par la relation $(\mathrm{rot}\, \varphi)_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \varphi_k$, avec ε_{ijk} le tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois et $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$. Si on explicite les trois composantes du rotationnel, on a finalement $\mathrm{rot}\, \varphi = (\partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2)\, e_1 + (\partial_3 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_3)\, e_2 + (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1)\, e_3$.

Le flux $\int_\Sigma (\mathrm{rot}.\varphi, n)\,\mathrm{d}\sigma$ du champ de rotationnel $\mathrm{rot}\,\varphi$ sur la surface Σ est égal à la circulation $\int_{\partial\Sigma} (\psi.\tau)\,\mathrm{d}s$ du champ de vecteurs φ le long du bord de la surface :
$\int_\Sigma (\mathrm{rot}.\varphi, n)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Sigma} (\varphi.\tau)\,\mathrm{d}s$.

- Quelques espaces fonctionnels

On se donne un ouvert Ω inclus dans $\mathbb{R}^N$ avec $N = 1, 2$ ou 3 dans les applications. L'ouvert Ω peut être borné ou non borné. On rappelle que $\mathrm{L}^1(\Omega)$ désigne l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur Ω: on a $\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Noter ici que l'intégrale est simple si $N = 1$, double si $N = 2$ et alors le symbole $\mathrm{d}x$ signifie en fait $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$, triple si $N = 3$ et bien sûr $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$. La norme $\| f \|_1$ de $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ est définie par $\| f \|_1 = \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
L'espace $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables pour la tribu des boréliens et de plus essentiellement bornées. Si la fonction f appartient à $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, alors sa valeur absolue $|f|$ est presque partout inférieure ou égale à une constante. On a
$(f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)) \iff (\exists\, C \geq 0,\ \mathrm{pp}(x \in \Omega),\ |f(x)| \leq C)$. On définit la norme $\| f \|_\infty$ dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ par la relation $\| f \|_\infty = \inf\{C \geq 0, \mathrm{pp}(x \in \Omega), |f(x)| \leq C\}$.
Munis de leurs normes respectives, les espaces $\mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ sont des espaces vectoriels normés.

- Espaces $\mathrm{L}^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$

On se donne toujours un entier $N \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On se donne aussi un nombre réel $p > 1$. L'ensemble $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est par définition l'ensemble des fonctions mesurables dont la puissance p^{o} appartient à $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Pour une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ si et seulement si $f^p \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. La norme $\| f \|_p$ est définie par $\| f \|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x)^{1/p}$. Démontrer que c'est effectivement une norme demande quelques développements spécifiques.

- Exposant conjugué pour $1 \leq p \leq \infty$

On se donne un nombre réel $p \geq 1$ ou éventuellement $p = \infty$, relations que l'on résume sous la forme $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'exposant conjugué q de l'exposant p par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En particulier si $p = 1$, alors $q = \infty$ et si $p = \infty$, alors $q = 1$. On observe aussi que l'exposant conjugué du cas $p = 2$ correspond à $q = 2$.

- Inégalité de Hölder

On se donne $p \geq 1$ avec éventuellement $p = \infty$. On note $q \geq 1$ l'exposant conjugué. On se donne $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathrm{L}^q(\Omega)$. Alors $f\,g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\| f\,g \|_1 \leq \| f \|_p \, \| g \|_q$. Si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- Inégalité triangulaire

On se donne un nombre réel $p > 1$. Alors pour $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, on a l'inégalité triangulaire $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$. Cette inégalité a été établie plus haut dans les cas $p = 1$ et $p = \infty$. Dans le cas proposé $1 < p < \infty$, la démonstration demande d'utiliser l'inégalité de Hölder.
L'inégalité triangulaire est le point délicat pour établir que muni de la norme $\| \,.\, \|_p$, l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est effectivement un espace vectoriel normé.

- Dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$ lorsque $1 \leq p < \infty$.

Le dual topologique $(L^p(\Omega))'$ de $L^p(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur $L^p(\Omega)$. Si $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ et $f \in L^p(\Omega)$, on note $< \varphi\,, f >$ l'image de la fonction f par la forme linéaire φ. On a donc $< \varphi\,, \lambda\, f > = \lambda < \varphi\,, f >$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $< \varphi\,, f+g > = < \varphi\,, f > + < \varphi\,, g >$ si f et g appartiennent a $L^p(\Omega)$. Si $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, la continuité de la forme linéaire φ exprime qu'il existe $C \geq 0$ de sorte que pour tout $f \in L^p(\Omega)$, $| < \varphi\,, f > | \leq C\, \| f \|_p$. Alors on peut définir une norme sur l'espace dual $(L^p(\Omega))'$ par la relation $\| \varphi \|_{(L^p)'} = \sup_{f \neq 0} \frac{<\varphi\,,f>}{\|f\|_p}$.

- Théorème de représentation des formes linéaires

On se donne un nombre réel p tel que $1 \leq p < \infty$ et on note q l'exposant conjugué. Pour toute forme linéaire $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, il existe une unique fonction $u \in L^q(\Omega)$ telle que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on a $< \varphi\,, f > = \int_\Omega u\, f\, \mathrm{d}x$. Si $1 \leq p < \infty$, toute forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $< \varphi\,, f > = \int_\Omega u\, f\, \mathrm{d}x$ ce pour pour toute fonction $f \in L^q(\Omega)$ et pour une unique fonction $u \in L^q(\Omega)$. *Modulo* cette identification de $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ et de $u \in L^q(\Omega)$, on peut écrire $L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$. Ce résultat généralise le théorème de représentation de Riesz valable pour les espaces de Hilbert, c'est à dire ici pour le cas particulier $p = 2$.

Lorsque $p = \infty$, Le dual $(L^\infty(\Omega))'$ de $L^\infty(\Omega)$ ne peut pas être identifié à $L^1(\Omega)$; il est strictement plus grand. On renvoie le lecteur au livre *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, de Haïm Brézis, publié à Paris chez Masson en 1983.

- Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach

On se donne p tel que $1 \leq p \leq \infty$. Muni de sa norme $\| \,.\, \|_p$ introduite plus haut, l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé complet ; on dit que c'est un espace de Banach. Dans l'espace $L^p(\Omega)$, toute suite de Cauchy converge. Si $f_k \in L^p(\Omega)$ est une suite de Cauchy, c'est à dire si ses termes sont infiniment proches les uns des autres à condition d'aller assez loin dans la numérotation, propriété qui se traduit par la phrase logique suivante :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq N$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\| f_{k+m} - f_k \|_p < \varepsilon$, alors il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$ et une seule telle que f_k converge vers f : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq N$, $\| f_k - f \|_p < \varepsilon$.

Si $p = 2$, le dual de l'espace $L^2(\Omega)$ est égal a $L^2(\Omega)$ lui-même. On peut le munir d'une structure de produit scalaire : $(f, g) = \int_\Omega f\, g\, \mathrm{d}x$.

- Quelques espaces $L^p(X)$ pour d'autres mesures

L'exemple le plus important est celui d'un ensemble X dénombrable muni de la tribu de l'ensemble de toutes les parties : $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ et de la mesure de comptage. On propose ici de travailler avec $X = \mathbb{N}$ pour fixer les idées.

L'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ est l'espace des séries absolument convergentes :

$\ell^1(\mathbb{N}) = \{u = (u_j)_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{j \in \mathbb{N}} |u_j| < \infty\}$. La norme dans $\ell^1(\mathbb{N})$ est définie par $\| u \|_1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |u_j|$.

L'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est l'espace des suites bornées :

$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{u = (u_j)_{j \in \mathbb{N}}, \exists\, C \geq 0, \forall\, j \in \mathbb{N}, |u_j| \leq C\}$. La norme associée $\| \,.\, \|_\infty$ s'introduit naturellement par $\| u \|_\infty = \sup\{|u_j|,\, j \in \mathbb{N}\}$.

Enfin, pour p réel tel que $1 < p < \infty$, l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ est l'espace des séries dont la puissance p^{o} est absolument convergente : $\ell^p(\mathbb{N}) = \{u = (u_j)_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{j \in \mathbb{N}} |u_j|^p < \infty\}$. La définition de la norme $\| \,.\, \|_p$ permet de rétablir l'homogénéité : $\| \, u \, \|_p = (\sum_{j \in \mathbb{N}} |u_j|^p)^{1/p}$.
Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ muni de la norme associée est un espace de Banach, c'est à dire un espace vectoriel normé complet.

- Dériver une fonctionnelle dans un espace de Banach

Il n'y a pas de vraie différence entre la dimension finie et la dimension ifinie pour calculer la différentielle d'une fonction. On doit simplement adapter le vocabulaire. Les éléments d'un espace vectoriel de dimension infinie sont souvent des fonctions, disons $\mathrm{L}^2(\Omega)$ pour fixer les idées. Une fonction définie sur un espace de fonctions s'appelle tarditionnellement une fonctionnelle. Par exemple $J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x$ avec $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. On peut se demander si la fonctionnelle $\mathrm{L}^2(\Omega) \ni u \longmapsto J(u) \in \mathbb{R}$ est différentiable et calculer ensuite l'action $\mathrm{d}J(u).h$ de sa différentielle au point u contre une fonction test $h \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Ce que l'on conseille pour effectuer ce calcul est d'introduire un nombre réel θ et de faire le calcul de la différentielle en fixant u et h et en faisant tendre θ vers zéro. On a typiquement $J(u + \theta\, h) = J(u) + \theta \, \mathrm{d}J(u).h + \mathrm{O}(\theta^2)$ et le nombre $\mathrm{d}J(u).h$ correspond au terme linéaire par rapport à la variale θ. Dans le cas de la fonctionnelle $J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x$, nous laissons au lecteur le soin de démontrer que
$\mathrm{d}J(u).h = \int_\Omega u\, h \, \mathrm{d}x$. On calcule par ce procédé la dérivée de Gateaux de la fonctionnelle J au point u et dans la direction h.

Exercices

- Intégration par parties pour le rotationnel

On se donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière régulière. On se donne d'abord deux champs scalaires u et v puis deux champs de vecteurs φ et ψ réguliers définis sur $\overline{\Omega}$.
a) Montrer que $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v(x) \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, n_j(x) \mathrm{d}\sigma$.
b) Si pour $x \in \partial\Omega$, $(\psi, n, \varphi)(x)$ désigne le produit mixte des trois vecteurs $\psi(x)$, $n(x)$ et $\varphi(x)$, montrer que l'on a la relation $\int_\Omega \psi . \mathrm{rot}\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{rot}\psi . \, \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\psi, n, \varphi)(x) \, \mathrm{d}\sigma$.

- Formule d'intégration par parties dans un triangle

Soit K le triangle "unité" défini par $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
a) Montrer la formule d'intégration par parties : $\int_K \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\partial K} u\, n_x \, \mathrm{d}\gamma$.
b) Montrer également que l'on a : $\int_K \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\partial K} u\, n_y \, \mathrm{d}\gamma$.
c) Comment généraliser ce résultat à un triangle quelconque ?

- Une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

On se donne un entier n, un vecteur b de $\mathbb{R}^n$ et une matrice réelle carrée A d'ordre n. On rappelle que le produit scalaire (x, y) de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j\, y_j$ en fonction des composantes x_j et y_j des vecteurs x et y. Pour x dans $\mathbb{R}^n$, on pose
$J(x) = \frac{1}{8} \big((x, Ax)\big)^3$.
a) Montrer que la fonction J est dérivable sur $\mathbb{R}^n$.
b) Calculer l'expression de la dérivée partielle $\frac{\partial J}{\partial x_j}$.

• Introduction aux problèmes elliptiques

On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. On note $\partial\Omega$ sa frontière qu'on suppose régulière et $\overline{\Omega}$ son adhérence composée de la réunion de l'ouvert Ω et de la frontière $\partial\Omega$.

Soit f une fonction donnée de $\overline{\Omega}$ à valeurs réelles. On s'intéresse au problème suivant : chercher une fonction u de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ de sorte que $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ce problème s'appelle le problème de Dirichlet homogène pour l'équation de Poisson. Si v et w sont deux fonctions régulières de l'ouvert Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et n la normale extérieure à $\partial\Omega$, on rappelle que $\frac{\partial v}{\partial n} \equiv \nabla v \,.\, n \equiv \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j$.

a) Montrer que $-\int_\Omega \Delta v\, w \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla v \,.\, \nabla w \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} w \,\mathrm{d}\gamma$.

Soient u et v deux fonctions solutions du problème $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Quel système d'équations vérifie la différence $\varphi \equiv u - v$?

b) En déduire que pour toute fonction w nulle sur le bord de Ω, on a $\int_\Omega \nabla\varphi \,.\, \nabla w \,\mathrm{d}x = 0$.

c) En déduire que la fonction φ est identiquement nulle et que le problème de Dirichlet $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ a au plus une solution régulière.

On se propose de déterminer explicitement la solution du problème de Dirichlet $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ dans le cas d'une seule dimension spatiale. On pose $\Omega =]0, 1[$ pour fixer les idées. On définit la fonction $G(x, \xi)$ par les relations $G(x, \xi) = \xi\,(1-x)$ si $\xi \le x$ et $G(x, \xi) = (1-\xi)\,x$ si $\xi \ge x$.

d) Montrer que la fonction u définie pour $0 \le x \le 1$ par $u(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\, f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ est une solution du problème $-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f$, $u(0) = u(1) = 0$.

• L'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ des séries absolument convergentes est complet

On se donne une suite de Cauchy $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(u^p)_k$ converge vers un nombre réel v_k si p tend vers l'infini.

b) Montrer que si on fixe $K \in \mathbb{N}$, le "paquet de Cauchy" $\sum_{k=0}^K |u_k^{p+m} - u_k^p|$ est arbitrairement petit et avec une valeur de m arbitraire pourvu que p soit choisi assez grand.

c) En supposant toujous l'entier K fixé, en déduire qu'il en est de même pour la différence $\sum_{k=0}^K |u_k^p - v_k|$

d) En déduire que la série de terme général $(u^p - v)$ est absolument convergente, c'est a dire que $u^p - v$ appartient à $\ell^1(\mathbb{N})$.

e) Montrer que $v \in \ell^1(\mathbb{N})$.

f) Montrer que la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $\ell^1(\mathbb{N})$:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \ge N$, $\sum_{k=0}^\infty |u_k^p - v_k| < \varepsilon$.

• Calcul différentiel dans un espace de fonctions [février 2016]

On se donne un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, u une fonction définie sur Ω et à valeurs réelles. On pose $\mathrm{L}^4(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \int_\Omega |u|^4 \,\mathrm{d}x < \infty\}$. L'intégrale $\int_\Omega |u|^4 \,\mathrm{d}x$ est donc finie si $u \in \mathrm{L}^4(\Omega)$ et on désigne par $\| u \| \equiv (\int_\Omega |u|^4 \,\mathrm{d}x)^{1/4}$ la norme de u dans l'espace $\mathrm{L}^4(\Omega)$.

a) Si E désigne un espace normé, f une application de E dans $\mathbb{R}$ et u un point de E, rappeler la définition de la différentiabilité de f au point u.

b) Pour $E = \mathrm{L}^4(\Omega)$, on pose $f(u) = \frac{1}{4} \int_\Omega |u|^4 \, \mathrm{d}x$. L'application f est-elle bien définie pour tout u dans $\mathrm{L}^4(\Omega)$?
c) Montrer que l'application f définie en b) est différentiable au point u. Calculer l'action $\mathrm{d}f(u).h$ de la différentielle sur un vecteur test $h \in \mathrm{L}^4(\Omega)$.
d) Montrer que la différentielle $\mathrm{d}f(u)$ est continue, c'est à dire qu'il existe $C \geq 0$ indépendant de h de sorte que $|\mathrm{d}f(u).h| \leq C \, \| h \|$.
e) Reprendre les questions b), c) et d) avec $f(u)$ remplacé par $\varphi(u) = (\frac{1}{4} \int_\Omega |u|^4 \, \mathrm{d}x)^3$.

- Calcul différentiel dans des espaces de fonctions

On se donne un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \{1, 2, 3\}$ et u une fonction définie sur Ω et à valeurs réelles.
a) Dans quel espace de fonctions classique la fontionnelle $N(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x$ est elle définie ?
b) Montrer qu'elle est différentiable et calculer son action $\mathrm{d}N(u).v$ sur une fonction test v.
c) Reprendre toute la question en remplaçant la fonctionnelle N par $\psi(u) = \big(\frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x\big)^3$.
d) Reprendre les questions a), b) et c) avec $N(u)$ remplacée par $\zeta(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^3 \, \mathrm{d}x$ et $\psi(u)$ par $\big(\zeta(u)\big)^3$.

- Dériver par rapport à une matrice

On se donne un entier n et on désigne par $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles à n lignes et n colonnes. Si $X \in GL_n(\mathbb{R})$, la matrice $\Phi(X) = X^{-1}$ existe et on définit ainsi une fonction Φ de $GL_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On désigne par I la matrice "identité" de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle la propriété classique que pour deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'inégalité suivante sur les normes : $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.
a) Si H désigne une matrice "assez petite", montrer, en utilisant le développement en série absolument convergent de $(\mathrm{I}+H)^{-1}$, que la matrice $\mathrm{I}+H$ est encore inversible.
b) En utilisant à nouveau le développement en série suggéré à la question précédente, montrer que la fonction Φ est dérivable au "point" I (matrice identité) et que l'on a : $\mathrm{d}\Phi(\mathrm{I}).H = -H$.
c) Si X désigne une matrice inversible arbitraire de $GL_n(\mathbb{R})$, montrer à l'aide des deux questions précédentes que la fonction "inverse" Φ est dérivable au "point" X et que l'on a : $\mathrm{d}\Phi(X).H = -X^{-1} H X^{-1}$.
d) Appliquer le résultat précédent si $n = 1$. Que constatez-vous ?

- A propos d'espaces de fonctions classiques

Soit p un réel supérieur ou égal à un, ou bien $p = +\infty$.
a) Démontrer que $\mathrm{L}^p(0, 1)$ est inclus dans $\mathrm{L}^1(0, 1)$.
On se donne maintenant un ouvert arbitraire Ω de $\mathbb{R}^n$. Le réel q désigne l'exposant conjugué de p, c'est à dire q est réel ou égal à $+\infty$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
b) Montrer que $\mathrm{L}^q(\Omega) \subset (\mathrm{L}^p(\Omega))'$ où $(\mathrm{L}^p(\Omega))'$ désigne le dual de $(\mathrm{L}^p(\Omega))$, c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur $(\mathrm{L}^p(\Omega))$.