le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 13 Des séries de Fourier aux espaces de Hilbert

- Produit scalaire hermitien

On se donne $T > 0$ et une fonction f à valeurs complexes et de carré intégrable sur l'intervalle $]0, T[$: $f \in \mathrm{L}^2(]0, T[, \mathbb{C})$, noté plus simplement $\mathrm{L}^2(0, T)$ dans la suite. On introduit le produit scalaire hermitien de deux fonctions de $\mathrm{L}^2(0, T)$: $(f, g) = \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. Ce produit scalaire hermitien est linéaire par rapport au premier facteur et antilinéaire par rapport au deuxième. On a en particulier $(f, \lambda\, g) = \overline{\lambda}\,(f, g)$ et $(\lambda\, f, \lambda\, f) = |\lambda|^2\,(f, f)$. De plus, $(g, f) = \overline{(f, g)}$ et en conséquence, $(f, f) \geq 0$.
La norme associée $\| f \|_2$ est définie par $\| f \|_2 = \sqrt{(f, f)}$. Si elle est nulle, alors la fonction f est nulle presque partout.

- Exponentielles complexes

On introduit une notation spécifique pour les fonctions exponentielles complexes de période multiple de $T > 0$: pour $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $e_k(t) = \exp(2\,k\,i\,\pi\,\frac{t}{T})$. On peut voir cette fonction comme une fonction périodique de période T ou bien comme une fonction de $\mathrm{L}^2(0, T)$. Les fonctions $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont de plus orthogonales : $(e_k, e_\ell) = T\,\delta_{k\ell}$.

- Polynômes trigonométriques

On se donne toujours $T > 0$ et on considère un entier $N \geq 0$. On introduit l'espace vectoriel P_N engendré par les exponentielles complexes e_k pour $-N \leq k \leq N$:
$P_N = < e_N, e_{-N+1}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}, e_N >$. L'espace P_N est un espace vectoriel sur le corps des complexes de dimension $2N+1$.

- Une projection orthogonale

On se donne $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ et $N \in \mathbb{N}$. Nous cherchons une fonction $g_N \in P_N$ qui soit le plus proche possible de f, c'est à dire telle que $\| f - g_N \|_2 \leq \| f - \varphi \|_2$ pour toute fonction $\varphi \in P_N$.
On se donne $\psi \in P_N$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On choisit d'abord $\varphi = g_N - \theta\,\psi$. Après quelques lignes de calcul, on a $\| f - \varphi \|_2^2 = \| f - g_N \|_2^2 + 2\,\theta\,\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \, \| \psi \|_2^2$. On déduit de la propriété de minimum que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2\,\theta\,\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \, \| \psi \|_2^2 \geq 0$ et $\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) = 0$ pour toute fonction $\psi \in P_N$. De façon analogue avec $\varphi = g_N - i\,\theta\,\psi$. Toutes choses égales par ailleurs, la propriété de minimum entraîne $2\,\theta\,\mathrm{Im}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \, \| \psi \|_2^2 \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et on en déduit $\mathrm{Im}(f - g_N, \psi) = 0$.
Des relations $\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) = 0$ et $\mathrm{Im}(f - g_N, \psi) = 0$ pour toute fonction $\psi \in P_N$, il vient $\forall\, \psi \in P_N$, $(f - g_N, \psi) = 0$. On développe maintenant $g_N = \sum_{|k|\leq N} \alpha_k\, e_k$ dans la base des exponentielles complexes $e_k \in P_N$ et on prend $\psi = e_j$ pour $|j| \leq N$. Compte tenu de l'orthogonalité des exponentielles complexes, le produit scalaire (g_N, e_j) ne comporte qu'un seul terme : $(g_N, e_j) = T\,\alpha_j$. On déduit de la relation $(f - g_N, e_j) = 0$ une expression du coefficient α_j :

François Dubois, janvier 2020.

$\alpha_j = \frac{1}{T}(f, e_j) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-2\,i\,j\,\pi\frac{t}{T})\,\mathrm{d}t$. La fonction $g_N \in P_N$ solution du problème de distance minimale $\|\, f - g_N \|_2 \leq \|\, f - \varphi \,\|_2$ s'écrit nécessairement sous la forme
$g_N = \sum_{k=-N}^{k=N} \widehat{f}_k\, e_k$. Le nombre $\widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-2\,i\,k\,\pi\frac{t}{T})\,\mathrm{d}t$ s'appelle le k^{o} coefficient de Fourier de la fonction f, suite aux travaux de Joseph Fourier (1768–1830) résumés dans son livre *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

- Solution du problème de minimisation

La fonction $g_N \in P_N$ définie par les relations $\widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-2\,i\,k\,\pi\frac{t}{T})\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $g_N = \sum_{k=-N}^{k=N} \widehat{f}_k\, e_k$ est effectivement la solution unique du problème de distance minimale, ou de projection orthogonale de la fonction f sur le sous-espace P_N de dimension finie. On a
$\|\, f - g_N \|_2 \leq \|\, f - \varphi \,\|_2$ pour toute fonction $\varphi \in P_N$.
Une remarque importante est que, compte tenu de l'orthogonalité dans $\mathrm{L}^2(0,T)$ des exponentielles complexes, les coefficients de Fourier $\widehat{f}_k$ ne dépendent pas de la dimension N.

- Inégalité de Bessel

On se donne $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et $N \in \mathbb{N}$. On a l'inégalité $\sum_{|k| \leq N} |\widehat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$. La preuve consiste à écrire le théorème de Pythagore : $\|\, f - \varphi \,\|_2^2 = \|\, f - g_N \,\|_2^2 + \|\, g_N - \varphi \,\|_2^2$, valable pour la solution $g_N \in P_N$ du problème de minimisation et pour toute fonction $\varphi \in P_N$. le cas particulier $\varphi = 0$ conduit à $\|\, g_N \|_2^2 \leq \|\, f \,\|_2^2$ qui exprime l'inégalité de Bessel.

- Convergence de la série de Fourier

Le terme général de la série de Fourier est par définition la fonction g_n, définie plus haut pour tout entier $n \geq 0$ avec la relation $g_n = \sum_{k=-n}^{k=n} \widehat{f}_k\, e_k$. L'inégalité de Bessel montre que cette suite est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$. Comme l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$ est complet pour la norme $\|\ \|_2$, la suite g_n converge vers une fonction $g \in \mathrm{L}^2(0,T)$.
Attention, la convergence dans $\mathrm{L}^2(0,T)$ n'entraîne pas la convergence ponctuelle ! Pour un nombre $t \in \mathbb{R}$ donné, la suite numérique $\sum_{k=-n}^{k=n} \widehat{f}_k\, e_k(t)$ ne converge pas forcément vers $g(t)$. Il faut extraire une sous-suite qui va converger presque partout, c'est à dire pour tout nombre réel t sauf pour un ensemble de mesure nulle.
La question importante maintenant est de savoir si $g = f$: la limite de la série de Fourier est-elle égale à la fonction f initiale ? Il s'agit d'une question très technique qui va demander d'approfondir deux points.

- Densité des polynômes trigonométriques

On pose d'abord $S = \cup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ l'espace de tous les polynômes trigonométriques. On introduit ensuite l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont périodiques et de période T. C'est un espace de Banach pour la norme $\mathrm{L}^\infty(0,T)$. Rappelons que pour
$\gamma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$, on a $\|\gamma\|_\infty = \sup\{|\gamma(t)|,\, 0 \leq t \leq T\}$. On a la double propriété de densité suivante.
D'une part, l'espace S des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ des fonctions continues périodiques et de période T. Toute fonction continue γ peut être approchée à une distance arbitraireent petite par un polynôme trigonométrique pour la norme du sup : pour $\gamma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in S$ tel que $\|\, \gamma - p \,\|_\infty < \varepsilon$.
D'autre part, l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ des fonctions continues périodiques est dense dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$. Toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ peut être approchée à une distance arbitraireent

petite par une fonction continue : pour $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ tel que $\| f - \gamma \|_2 < \varepsilon$.
On peut alors utiliser ces deux résultats conjointement car T est un nombre positif fixé : l'espace S des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$: pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $p \in S$ tel que $\| f - p \|_2 < \varepsilon$.

- Quatre propriétés équivalentes

On a l'équivalence des quatre propriétés suivantes :
(i) l'espace S des polynômes trigonométriques est total, ce qui signifie que son orthogonal $S^\perp \equiv \{\varphi \in \mathrm{L}^2(0, T), \forall p \in S, (\varphi, p) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$.
(ii) l'espace S est dense, propriété qui vient d'être démontrée au paragraphe précédent.
(iii) l'inégalité de Bessel devient une égalité si l'entier n tend vers l'infini :
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$. Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Parseval ; à un facteur multiplicatif près, la norme est conservée dans la transformation de Fourier
$\mathrm{L}^2(0, T) \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
(iv) la transformation de la fonction $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ en la série de ses coefficients de Fourier $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ conserve le produit scalaire à un facteur multiplicatif près :
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k \,\overline{\widehat{g}_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. Cette transformation définit une isométrie entre les espaces de Hilbert $\mathrm{L}^2(0, T)$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.
La preuve de cette propriété est un cas particulier d'un résultat général valable dans tous les espaces de Hilbert.

- Espaces de Hilbert

Ces espaces, introduits par le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943), permettent de généraliser la notion de série de Fourier et de les replacer dans un cadre mathématique beaucoup plus large. De plus, les espaces de Hilbert permettent de faire de la géométrie euclidienne dans des espaces de fonctions.

- Produit scalaire hermitien

La théorie qui est présentée ici est relative aux corps des complexes. Elle peut se restreindre au cas du corps des nombres réels sans difficulté.
Un espace préhilbertien H sur le coprs des nombres complexes est la donnée d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien, c'est à dire d'une fonction de deux arguments $H \times H \ni (x, y) \longmapsto (x, y) \in \mathbb{C}$ qui satisfait aux propriétés suivantes :
- conjugaison par échange des arguments : $(y, x) = \overline{(x, y)}$,
- linéarité par rapport au premier argument : $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ et $(\lambda\, x, y) = \lambda\,(x, y)$ pour tout x, x_1, x_2, y dans H et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
- antilinéarité par rapport au second argument : $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ et $(x, \lambda\, y) = \overline{\lambda}\,(x, y)$ pour tout x, y, y_1, y_2 dans H et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
- positivité du carré scalaire : $(x, x) \geq 0$,
- existence de la norme : $\| x \| \equiv \sqrt{(x, x)}$,
- caractère défini de la norme : si $\| x \| = 0$, alors $x = 0$.

Alors on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$ pour tout x, y dans H. L'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout x, y dans H. De plus, si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité, les deux vecteurs x et y sont colinéaires.

- Définition d'un espace de Hilbert

Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien tel que, muni de la norme associée $\| \; \|$, l'espace vectoriel normé $(H, \| \; \|)$ est un espace complet.

- Projection sur un sous-espace vectoriel fermé

On se donne un sous-espace vectoriel M de l'espace de Hilbert H. On note $M^{\perp}$ l'orthogonal du sous-espace M. On suppose que M est fermé pour la topologie induite par la norme sur H. Alors il existe deux projecteurs $P\colon H \longrightarrow M$ et $Q\colon H \longrightarrow M^{\perp}$ de sorte que $x = Px + Qx$ pour tout $x \in H$, $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, \, y \in M\}$ et $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ pour tout $x \in H$.
Comme tout sous-espace de dimension finie de H est fermé, ce théorème permet de s'assurer que pour tout entier $n \geq 0$, la projection $\mathrm{L}^2(0, T) \ni f \longmapsto g_n \in P_n$ étudiée plus haut définit effectivement un projecteur de distance minimale.

- Théorème de représentation de Riesz

On désigne par H' l'espace des formes linéaires continues sur l'espace de Hilbert H. Si $\varphi \in H'$, alors pour tout $x \in H$, $< \varphi, x >$ désigne le nombre complexe image par φ du vecteur x. Dire que la forme linéaire φ est continue exprime qu'il existe une constante $C \geq 0$ de sorte que pour tout $x \in H$, $|< \varphi, x >| \leq C \, \|x\|$. Le théorème de représentation de Riesz énonce que $\varphi \in H'$ peut être représentée de façon unique par un vecteur $u \in H$: $< \varphi, x > = (x, u)$ pour tout $x \in H$. Le théorème de Riesz a déjà été évoqué quand nous nous sommes intéressé aux formes linéaires continues sur $\mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.

- Familles orthonormées

Une famille orthonormée $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est formée de vecteurs unitaires de l'espace de Hilbert H deux à deux orthogonaux : $(u_k, u_\ell) = \delta_{k\ell}$. Pour $x \in H$, on introduit ses coefficients de Fourier $\widehat{x}_k$ relativement à la famille $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec la relation $\widehat{x}_k = (x, u_k)$.
Les quatre conditions suivantes sont équivalentes
(i) la famille $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est totale : $((\varphi, u_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}) \Longrightarrow (\varphi = 0)$. Si φ est orthogonal à tous les u_k, alors φ est nul,
(ii) l'espace S des combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dense dans H: $\forall \varphi \in H$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in \mathbb{C}$, $\| \varphi - \sum_{k=0}^{N} x_k \, u_k \| < \varepsilon$,
(iii) la somme des carrés des modules des coefficients de Fourier $\widehat{x}_k \equiv (x, u_k)$ est égale au carré de la norme $\|x\|^2$: $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\widehat{x}_k|^2 = \|x\|^2$,
(iv) pour tout x, $y \in H$, on a l'identité de Bessel-Parseval $\sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{x}_k \, \overline{\widehat{y}_k} = (x, y)$.

Exercices

- Dent de scie

On se donne un réel positif T. Soit u la fonction périodique de période T définie sur l'intervalle $]0, T[$ par la relation $u(t) = \frac{t}{T}$.

a) Montrer qu'on peut développer u en série de Fourier faisant intervenir essentiellement la fonction sinus.

b) Que peut-on dire de la convergence ponctuelle de la série de Fourier ainsi obtenue ?

c) En utilisant l'égalité de Parseval, établir la somme classique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Transformée de Fourier de la corde pincée

Soit β un réel non nul.

a) Montrer qu'on a la relation suivante

$\int_0^1 \theta \exp(i\beta\,\theta)\,\mathrm{d}\theta \,=\, \big[\frac{1}{\beta^2}(\cos\beta\,-\,1) + \frac{1}{\beta}\sin\beta\big] + i\,\big[\frac{1}{\beta^2}\sin\beta - \frac{1}{\beta}\cos\beta\big]\,.$

On se donne α de sorte que $0 < \alpha < 1$. On définit la "corde pincée" comme la fonction c périodique de période 1, continue sur $\mathbb{R}$, affine sur les intervalles $[0, \alpha]$ et $[\alpha, 1]$ de sorte que $c(0) = c(1) = 0$ et $c(\alpha) = 1$.

b) Vérifier que $c(\theta) = \min\big(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1-\theta}{1-\alpha}\big)$.

c) En déduire de la relation (1) que le développement en série de Fourier de la corde pincée est donné par la relation

$c(\theta) \,=\, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,\alpha\,(1-\alpha)\,\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\,\big[\big(\cos(2k\pi\alpha) - 1\big)\,\cos(2k\pi\theta) + \sin(2k\pi\alpha)\,\sin(2k\pi\theta)\big].$

- Equation de la chaleur sur un intervalle

On se donne $\kappa > 0$. On cherche à résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} \,-\, \kappa\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in [0, L]$ et $t \geq 0$. On se donne d'abord des conditions aux limites périodiques : $u(0, t) = u(L, t)$ pour tout instant $t \geq 0$. On se donne aussi une condition initiale de la forme $u(x, 0) = u_0(x)$ pour tout $x \in [0, L]$, où u_0 est une fonction donnée qui satisfait aux conditions limites : $u_0(0) = u_0(L)$.

a) Chercher une solution de l'équation de la chaleur $u(x, t)$ sous la forme d'une série de Fourier relative à la variable x avec des coefficients réels qui dépendent du temps. On pourra prendre la fonction u périodique de de période L.

b) Montrer que les coefficients de Fourier sont alors solutions d'équations différentielles très simples qu'on intègrera sans difficulté.

c) Montrer que les conditions initiales sont reliées naturellement aux coefficients de Fourier correspondants de la condition initiale u_0.

On change les conditions aux limites ; on remplace les conditions aux limites périodiques par des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur les bords de l'intervalle : pour tout $t > 0$, $u(0, t) = 0$ et $u(L, t) = 0$. La condition initiale u_0 est maintenant une fonction donnée qui satisfait aux nouvelles conditions aux limites : $u_0(0) = 0$ et $u_0(L) = 0$.

d) Reprendre les questions a), b), c) avec ces nouvelles conditions aux limites. On cherchera la fonction inconnue u sous la forme d'une série de Fourier relative à x avec des coefficients qui dépendent du temps. On pourra étendre la fonction u *a priori* définie sur l'intervalle $[0, L]$ en une fonction impaire et chercher u périodique de période $2L$.