le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 14 Transformation de Fourier

• Transformation de Fourier dans l'espace des fonctions intégrables

On se donne une fonction intégrable à valeurs complexes : $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f. On la note aussi $\mathscr{F} f$ et on a $(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

• Exemples fondamentaux

On se donne $a > 0$. L'exponentielle causale φ_a est définie par $\varphi_a(t) = H(t)\,\exp(-a\,t)$. C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$: $\varphi_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$.

Pour $a > 0$, l'exponentielle causale symétrisée ψ_a s'écrit : $\psi_a(t) = \exp(-|a|\,t)$. C'est une fonction paire qui est identique à φ_a si $t \geq 0$. On a $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$. Nous retenons que $(\mathscr{F}(\exp(-a\,|t|)))(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$.

Pour $T > 0$, la porte P_T de largeur T satisfait aux contraintes suivantes : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq T/2$ et $P_T(t) = 0$ lorsque $t < -T/2$ ou $t > -T/2$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien entendu finie $[P_T \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})]$ et on a $\widehat{P}_T(\omega) = \frac{2}{\omega}\,\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

• Sinus cardinal

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ nombre réel différent de zéro, on pose $\mathrm{sinc}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\theta}$. On prolonge cette fonction par continuité en $\theta = 0$: $\mathrm{sinc}\,0 = 0$. Alors $\widehat{P}_T(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

• Transformée de Fourier de la gaussienne

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$. C'est la gaussienne centrée réduite. Elle satisfait aux relations [exercice !] $\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $\int_{\mathbb{R}} t\,g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, $\int_{\mathbb{R}} t^2\,g(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $\int_{\mathbb{R}} t^3\,g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, $\int_{\mathbb{R}} t^4\,g(t)\,\mathrm{d}t = 3$, *etc*. Sa transformée de Fourier a une expression classique, et c'est aussi une gaussienne : $\widehat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,g(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$.

• Parité

On remarque que si f est paire, sa transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ est paire également [exercice].

• Linéarité

Si les fonctions f et g sont intégrables, leur somme est aussi intégrable et on a $\mathscr{F}(f+g) = \mathscr{F} f + \mathscr{F} g$. Si λ est un nombre complexe arbitraire et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}(\lambda\,f) = \lambda\,\mathscr{F} f$.

• Transformée de Fourier d'un retard et retard de la transformée de Fourier

On se donne $a \in \mathbb{R}$. Alors $(\mathscr{F}(f(t-a)))(\omega) = \exp(-i\,a\,\omega)\,(\mathscr{F} f)(\omega)$. De façon analogue, si ω_0 est un réel arbitraire, $(\mathscr{F} f)(\omega-\omega_0) = (\mathscr{F}(\exp(i\,\omega_0\,t)\,f(t)))(\omega)$.

François Dubois, janvier 2020.

- Changement d'échelle

On se donne $a > 0$. Alors $(\mathscr{F}(f(a\,t)))(\omega) = \frac{1}{a}\,(\mathscr{F} f)\big(\frac{\omega}{a}\big)$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est bornée

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. En d'autres termes, $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{1}$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction continue de l'argument ω. On a dans ce cas $\widehat{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. On laisse le lecteur vérifier cette propriété pour les trois exemples fondamentaux rappelés ci-dessus.

La preuve est une utilisation du théorème de convergence dominée : la fonction $\omega \longmapsto f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)$ est continue pour presque toute valeur de $t \in \mathbb{R}$. De plus, elle est dominée par la fonction intégrable $|f|$: $|f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)| \leq |f(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc la fonction intégrée en temps $\omega \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue.

- Une condition suffisante de limite nulle à l'infini

On se donne une fonction f dérivable de sorte que f et sa dérivée f' appartiennent toutes deux à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty}(|f(t)| + |f'(t)|)\,\mathrm{d}t < \infty$. Alors la fonction f tend vers zéro à l'infini : $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$.

- Transformée de Fourier de la dérivée

Si la fonction f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $(\mathscr{F}(f'))(\omega) = i\,\omega\,(\mathscr{F} f)(\omega)$.

La preuve se fait par intégration par parties. Comme les fonctions f et f' sont dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction f tend vers zéro et le terme tout intégré est nul. Le résultat proposé s'en déduit alors.

- Dérivée de la transformée de Fourier

On suppose que les fonctions f et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto t\,f(t) \in \mathbb{C}$ appartiennent à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Alors la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\omega} = -i\,(\mathscr{F}(t\,f(t)))(\omega)$.

La preuve de ce résultat est une utilisation du théorème de convergence dominée. La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial\omega}\big(f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)\big)$ est majorée en module par $|t|\,|f(t)|$. Cette fonction est intégrable et ne dépend pas de la variable ω par rapport à laquelle on dérive. Donc le calcul formel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\big(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}\big(f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)\big)\,\mathrm{d}t$ est valable, ce qui justifie la relation proposée.

- Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On suppose que les fonctions f et g sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit de convolution $f*g$ défini par la relation $(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)\,g(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$ appartient également à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\mathscr{F}(f*g) = (\mathscr{F} f)\,(\mathscr{F} g)$. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.

La preuve de ce résultat demande d'abord de vérifier que le produit de convolution de deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ appartient encore à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Une fois cette propriété établie à l'aide du théorème de Tonnelli, on forme la transformée de Fourier $\widehat{f*g}$ du produit de convolution $f*g$ des fonctions f et g avec une intégrale double : $\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\,\big(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}y\,f(y)\,g(x-y)\big)\,\exp(-i\,\xi\,x)$. Le théorème de Fubini permet alors déchanger l'ordre d'intégration :

$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, g(x-y) \exp(-i\,\xi\, x)\right)$ et la fin du calcul est alors un exercice laissé au lecteur.

• Une propriété de l'opérateur de translation

On se donne une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t-\tau) - f(t)|\,\mathrm{d}t$ tend vers zéro si le nombre τ tend vers zéro.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers zéro à l'infini

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ tend vers zéro lorsque ω tend vers $+\infty$ ou ω tend vers $-\infty$.

Nous constatons que la propriété est vraie pour les trois exemples fondamentaux introduits plus haut, à savoir l'exponentielle causale $\varphi_a(t) = H(t)\exp(-a\,t)$, l'exponentielle causale symétrisée $\psi_a(t) = \exp(-a\,|t|)$ et la porte P_T égale à 1 si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et à zéro sinon [avec $a > 0$ et $T > 0$]. On a en effet $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$, $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$ et $\widehat{P}_T(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$; ces trois fonctions tendent bien vers zéro si $|\omega|$ tend vers l'infini.

La preuve est délicate et repose sur une propriété très fine de l'opérateur de translation énoncée ci-dessus. Puisque $\exp(-i\pi) = -1$, on écrit la définition de la transformée de Fourier sous la forme $\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-i\pi)\exp(-i\xi t)\,\mathrm{d}t$ et on a le calcul suivant :
$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\exp\left(-i\,\xi\,(t+\frac{\pi}{\xi})\right)\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f\left(\theta - \frac{\pi}{\xi}\right)\exp(-i\,\xi\,\theta)\,\mathrm{d}t$. Donc
$2\,\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left[f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{\xi}\right)\right]\exp(-i\xi t)\,\mathrm{d}t$ et $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{\xi}\right)|\,\mathrm{d}t$. Si ξ tend vers l'infini, l'expression $\frac{\pi}{\xi}$ tend vers zéro et la dernière intégrale tend vers zéro compte tenu du résultat rappelé plus haut sur l'opérateur de translation.

• Opérateur de Fourier conjugué

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$ par l'expression
$(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$. Seul le signe de ω dans l'exponentielle complexe a changé. On a la relation $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

• Théorème d'inversion de Fourier (première formulation)

Si d'une part la fonction f est intégrable ($f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$) et si de plus sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable ($\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$), alors on peut représenter la fonction f à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué : $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ et cette égalité a lieu "pour presque tout" $t \in \mathbb{R}$ (pour tout réel t dans les applications en ingénierie). On peut écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}\widehat{f})(t)$ ou $f(t) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$.

Seul le second exemple fondamental permet de tester ce théorème d'inversion de Fourier puisque les fonctions $\widehat{\varphi}_a$ et $\widehat{P}_T$ n'appartiennent pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice !]. On a par contre $\widehat{\psi}_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice] et le théorème d'inversion de Fourier s'écrit dans ce cas particulier
$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\frac{\mathrm{d}\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{\pi}{a}\exp(-a\,|t|)$. On constate qu'on a calculé avec des fonctions élémentaires l'intégrale d'une fonction [ici $\exp(i\,\omega\,t)/(a^2+\omega^2)$] dont la primitive ne peut pas s'exprimer en termes de fonctions élémentaires.

Dans le cas de la gaussienne, l'égalité $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi)\exp(i\xi t)\,\mathrm{d}\xi$ se vérifie avec un simple calcul d'intégrales.

L'égalité ponctuelle presque partout $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$ peut s'écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,\big((\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F})f\big)(t)$ pour tout réel t, c'est à dire $\big((\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F})f\big)(t) = 2\pi\, f(t)$. On en déduit donc une égalité entre fonctions $(\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\, f$ pour toute fonction intégrable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable.

- Inverse de l'opérateur de Fourier

On note dans ce paragraphe $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions intégrables telles que leur transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable. Alors l'égalité précédente $(\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\, f$ est vraie pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$. On en déduit que l'opérateur $\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F}$ transforme la fonction f en elle même, à un facteur 2π près. Si on appelle "identité" l'opérateur $\mathscr{E} \ni f \longmapsto \mathrm{id} f = f \in \mathscr{E}$, la relation $(\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,\mathrm{id} f$ valable pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$ peut aussi s'écrire comme une relation entre opérateurs de l'espace $\mathscr{E}$: $\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Quand on compose les opérateurs $\mathscr{F}$ et $\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$, on trouve l'identité : $\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big){\scriptstyle\circ}\mathscr{F} = \mathrm{id}$. On peut montrer [exercice !] qu'on a aussi $\mathscr{F}{\scriptstyle\circ}\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big) = \mathrm{id}$. En d'autres termes, $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier est égal à l'opérateur de Fourier conjugué !

- Approximation des fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Si on se donne une fonction de carré intégrable ($f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$), elle n'est pas en général intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais si on la tronque en posant pour k entier positif, $f_k = P_{2k}\, f$, c'est à dire $f_k(t) = f(t)$ si $|t| \leq k$ et $f_k = 0$ sinon, on obtient une suite de fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Cette suite f_k converge vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $\|f - f_k\|_2$ tend vers zéro si k tend vers l'infini.

- Transformée de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Comme la suite f_k appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f_k}$ est bien définie *via* la relation $\widehat{f_k}(\omega) = \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\, t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut montrer que cette suite $\widehat{f_k}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et converge dans cet espace vers une fonction notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F} f$ qui définit la transformation de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, on a pour "presque tout" $\omega \in \mathbb{R}$, $(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\, t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

On constate que la définition de la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ n'est pas aussi immédiate que dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Elle a de toutefois de nombreuses propriétés, très simples à énoncer.

- Théorème de Plancherel

L'application $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ définit un isomorphisme de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On a conservation, à 2π près, du produit scalaire hilbertien : $(\widehat{f}, \widehat{g}) = 2\pi\,(f, g)$, identité dite de Bessel-Parseval : $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. En prenant $g = f$, on a la conservation de la norme à un facteur 2π près : $\|\mathscr{F} f\|^2 = 2\pi\,\|f\|^2$, identité qui exprime que $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

- Opérateur de Fourier conjugué dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

On étend comme dans le cas précédent la transformée de Fourier conjuguée à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} \exp(i\,\omega\, t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$. On a également, pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (seconde formulation)

On a dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ les relations suivantes entre l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ et l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$: $\overline{\mathscr{F}}{\scriptstyle\circ}\mathscr{F} = \mathscr{F}{\scriptstyle\circ}\overline{\mathscr{F}} = 2\pi\,\mathrm{id}$. On peut aussi écrire ces relations sous la

forme $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions de carré intégrable est égal à l'opérateur de Fourier conjugué.
On en déduit que pour toute fonction f de carré intégrable, on a $f = \frac{1}{2\pi}(\mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}})(f)$ et on a aussi $f = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F})(f)$. En particulier pour (presque) tout nombre réel t, on a les égalités $f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f)\big)(t)$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)\big)(t)$. On ne peut ensuite écrire ces égalités avec des intégrales que si les fonctions f et $\mathscr{F}f$ sont intégrables.

- Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide du théorème d'inversion de Fourier

Pour la fonction porte, on se donne $T > 0$. On déduit [exercice !] des égalités précédentes la relation $\mathscr{F}\big(\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)\big)(t) = \frac{2\pi}{T}P_T(t)$. En particulier pour $T = 2$, $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = \pi$ si $|t| < 1$ et $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = 0$ si $|t| > 1$. Grâce au théorème d'inversion de Fourier, on a calculé la transformée de Fourier du sinus cardinal sans jamais écrire une seule intégrale !

Exercices

- Convolution de la porte et transformation de Fourier

Soit T un réel strictement positif et P_T la fonction "porte" définie par $P_T(t) = 1$ pour $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon.
a) Montrer que le produit de convolution $P_T * P_T$ est une fonction φ_T définie par $\varphi_T(t) = t + T$ pour $-T \le t \le 0$, $\varphi_T(t) = T - t$ pour $0 \le t \le T$ et $\varphi_T(t) = 0$ sinon.
b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction φ_T.

- Transformation de Fourier de la gaussienne

On admet que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.
En déduire la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ de la gaussienne $f(t) \equiv \exp(-t^2/2)$.

- Transformation de Fourier du sinus cardinal

Pour t réel, on définit le sinus cardinal $\mathrm{sinc}(t)$ par la relation $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$.
A l'aide de la transformée de Fourier d'une porte bien choisie et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier du sinus cardinal.

- Autour de la transformée de Fourier d'une loi de Cauchy

Pour t réel, une loi de Cauchy est une fonction de la forme $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
a) A l'aide de la transformée de Fourier de la fonction $\exp(-a\,|t|)$ et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$.
b) En déduire la transformée de Fourier des fonctions $g(t) = \frac{1}{10+6t+t^2}$, $h(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$ et $k(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

- Quelques intégrales

a) A partir des résultats de l'exercice précédent, expliciter la transformée de Fourier du carré du sinus cardinal, c'est à dire de la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$.
b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
c) Même question pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\,\mathrm{d}t$.
d) Préciser, selon les valeurs du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$, les valeurs prises par l'intégrale

$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$.

- Transformation de Fourier [février 2014]

On se donne un réel a strictement positif et la fonction f définie par $f(t) = \exp(-a\ |t|)$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} f)(\omega)$?

b) Démontrer que la fonction $(\mathscr{F} f)(\omega)$ est à la fois paire et réelle.

c) Expliquer pourquoi la fonction $g(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

d) Pour t réel arbitraire, montrer que l'expression $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$ est bien définie.

e) A l'aide de quel opérateur la fonction Φ est-elle reliée à la fonction g ?

f) Calculer une expresion analytique de $\Phi(t)$ pour tout nombre réel t.

- Transformation de Fourier [février 2018]

On se donne $T > 0$ et on définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par les relations $f(t) = 1$ si $0 < t < T$, $f(t) = -1$ si $-T < t < 0$ et $f(t) = 0$ si $|t| > T$.

a) Montrer que la fonction f appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

b) En déduire l'expression $\widehat{f}(\xi)$ de sa transformée de Fourier pour tout nombre réel ξ.

c) La fonction f appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

d) En déduire une expression analytique de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$.