le cnam

**Département de Mathématiques et Statistiques**

## Analyse Mathématique pour l'Ingénieur (MAA106)

## Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, le 12 novembre 2019

### Une propriété des matrices symétriques définies positives

Soit $n$ en entier supérieur ou égal à un. Pour $x = (x_1, \, \dots, \, x_n)$ et $y = (y_1, \, \dots, \, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire $(x \, , \, y)$ des vecteurs $x$ et $y$ par la relation $(x \, , \, y) \, = \, \sum_{j=1}^n x_j \, y_j$ et la norme $|| \, x \, ||$ de $x$ par $|| \, x \, || = \, \sqrt{(x \, , \, x)}$. On définit la sphère unité $S$ de $\mathbb{R}^n$ selon $S \, = \, \{x \in \mathbb{R}^n, \, || \, x \, || = \, 1\}$. On se donne une matrice $A$ à $n$ lignes et $n$ colonnes, symétrique, c'est à dire $(A \, x \, , \, y) \, = \, (x \, , \, A \, y)$ pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que la matrice $A$ est définie positive : $(A \, x \, , \, x) \, > \, 0$ si $x$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Pour $x$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = (A \, x \, , \, x)$.

a) La sphère $S$ est-elle ouverte ?

b) La sphère $S$ est-elle fermée ?

c) La sphère $S$ est-elle bornée ?

d) La sphère $S$ est-elle compacte ?

e) On suppose dans cette question (uniquement) $n \, = \, 2$. On se donne une suite quelconque de réels $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on pose $x^k = (\cos(\alpha^k) \, , \, \sin(\alpha^k))$. Montrer que $x^k \in S$ pour tout entier $k$ et rappeler pourquoi la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet toujours au moins une valeur d'adhérence.

f) Montrer que l'application $f$ est continue de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

g) En déduire que l'application $f$ est continue de $S$ dans $\mathbb{R}$.

h) Montrer qu'il existe $\alpha$ strictement positif de sorte que $\forall x \in S, \; f(x) \geq \alpha$.

i) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \; (A \, x \, , \, x) \geq \alpha \; ||x||^2$.

François Dubois, 29 octobre 2019.