Département de Mathématiques et Statistiques

## Analyse Mathématique pour l'Ingénieur (MAA106)

## Devoir 4, à rendre pour la séance numéro 13, le 07 janvier 2020

## Optimisation sous contraintes d'égalité

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\, e_1,\, e_2,\, e_3)$. La topologie sur $\mathcal{E}$ est associée à la distance euclidienne ; la distance entre deux points $A$ et $B$ est égale à la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soit $K$ l'ensemble des points $M$ de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x,\, y,\, z)$ de sorte que $x+2\,y+z=4$ et $x^2+y^2=5$.

a) Montrer que l'ensemble $K$ n'est pas vide.

b) Montrer que l'ensemble $K$ est fermé.

c) Montrer que l'ensemble $K$ est borné.

d) L'ensemble $K$ est-il compact ?

Pour un point $M$ de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x,\, y,\, z)$ de coordonnées arbitraires, on pose $J(M) = \frac{1}{2}\,(x^2+y^2+z^2)$.

e) Montrer que l'application $J$ est différentiable en tout point $M \in \mathcal{E}$ et calculer la valeur de $\mathrm{d}J(M).H$, image du vecteur $H = h_1\,e_1 + h_2\,e_2 + h_3\,e_3$ par l'application linéaire tangente $\mathrm{d}J(M)$ au point $M$.

f) L'application $J$ est-elle continue sur $\mathcal{E}$ ?

g) En déduire qu'il existe au moins un point $X \in K$ tel que $J(X) \leq J(M)$ pour tout $M \in K$.

h) De même, montrer qu'il existe au moins un point $Y \in K$ tel que $J(Y) \geq J(M)$ pour tout $M \in K$.

i) Afin de déterminer par un calcul analytique les points $X$ et $Y$, former le Lagrangien associé au problème de minimisation de la fonction $J$ sur l'ensemble $K$.

On notera $(x,\, y,\, z)$ les coordonnées du point de minimum $X \in K$ ou de maximum $Y \in K$.

j) À l'aide des conditions d'extrémalité, montrer que $z$ est égal à l'un des deux multiplicateurs de Lagrange.

k) En déduire que l'on peut écrire $z$ sous la double forme $z = a\,x$ et $z = b\,y$, où $a$ et $b$ peuvent être exprimés en fonction du second multiplicateur de Lagrange.

l) Dans le cas où $a=b=0$, expliciter les valeurs des points extrémaux qui correspondent à ce cas particulier.

m) Dans le cas où les coefficients $a$ et $b$ sont tous les deux non nuls, montrer que le nombre $z$ ne peut prendre que deux valeurs possibles que l'on précisera.

n) Que vaut [valent] le [les] point [points] $X$ introduit [introduits] à la question g) ? Quelle est la valeur minimale $J(X)$ ?

o) Que vaut [valent] le [les] point [points] $Y$ introduit [introduits] à la question h) ? Quelle est la valeur maximale $J(Y)$ ?

François Dubois, 10 décembre 2019.