le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 1 Suites et séries de nombres réels

- Suite géométrique

On se donne un nombre q. Un nombre réel *a priori*, mais l'essentiel de ce qui suit reste valable si q est un nombre complexe. Dans le cadre de ce cours, une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q satisfait à la condition initiale $u_0 = 1$ et à la relation d'itération $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout entier naturel n. On établit alors facilement par récurrence que $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $q = 1$, la suite géométrique est constante et si $q = -1$, elle est alternée.
Si $q > 1$, la suite géométrique $u_n = q^n$ tend vers $+\infty$ si n tend vers l'infini. Si $|q| < 1$, la suite géométrique tend vers zéro si n tend vers l'infini.

- Série associée à une suite

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque de nombres réels ou complexes. On forme la somme partielle des premiers termes de la suite : $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$ et de façon générale, $S_n = S_{n-1} + u_n$. On remarque qu'avec cette définition, la somme partielle S_n comporte $n+1$ termes. Avec ce procédé, on construit à partir de la suite initiale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles. Cette suite des sommes partielles définit la série associée à la suite u_n.

- Condition nécessaire de convergence d'une série numérique

On se donne une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série associée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = u_0$ et $S_n = S_{n-1} + u_n$ dès que n est un entier ≥ 1. Si S_n converge vers une limite finie, alors la suite initiale u_n tend vers zéro. Il suffit d'écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$.
Attention, cette condition nécessaire de convergence n'est pas suffisante, comme on le verra plus loin.

- Série géométrique

A partir de la suite géométrique $u_n = q^n$ on peut former la série associée. On a alors $S_n = n+1$ si $q = 1$ et $S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$.
Si $|q| < 1$, la série géométrique converge ; on a $S_n \longrightarrow \frac{1}{1-q}$ si l'entier n tend vers $+\infty$.
Dans le cas $q = \frac{1}{2}$ par exemple, on ajoute à chaque fois un terme deux fois plus petit que le précédent ; le résultat reste "fini", même si le nombre de termes est de plus en plus grand et se rapproche de plus en plus du nombre 2.
Ce cas particulier de la série géométrique nous incite à revenir à des considérations générales sur les nombres réels et les suites de nombres réels.

François Dubois, septembre 2021.

- Une propriété fondamentale des nombres réels.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure : c'est le plus petit élément de l'ensemble de ses majorants. Soit $P \subset \mathbb{R}$ que l'on suppose non vide ($P \neq \emptyset$) et majorée : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in P, x \leq A$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$, tels que d'une part M est un majorant de P: $\forall x \in P, x \leq M$ et d'autre part, M est le plus petit majorant de la partie P: si le nombre B est un majorant de P, alors il est plus grand que M: $\big(\forall x \in P, x \leq B\big) \Longrightarrow \big(M \leq B\big)$.
La borne supérieure d'une partie P non vide et majorée de $\mathbb{R}$ se note $\sup P$ ou $\sup(P)$.

- Suite croissante majorée de nombres réels.

On se donne une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Si elle est majorée, c'est à dire telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq A$ pour pour tout entier, alors elle est convergente ; il existe un (et un seul !) nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$. On laisse en exercice au lecteur le fait de démontrer que $\ell = \sup\big(\{u_n, n \in \mathbb{N}\}\big)$.
Exemple. La suite $u_0 = 0$, $u_1 = 0.3$, $u_2 = 0.33, \cdots$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k}$ est une suite croissante majorée qui converge vers $\frac{1}{3}$. C'est la somme des termes d'une progression géométrique dont on peut préciser la raison.

- Série à termes positifs

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs : $u_n \geq 0$. Il y a deux éventualités pour le comportement de la série associée S_n telle que $S_0 = u_0$ et $S_n = S_{n-1} + u_n$. Ou bien l'ensemble $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré et la série converge. Ou bien l'ensemble $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré et la suite S_n des sommes partielles tend vers $+\infty$ si n tend vers l'infini.
Exemples. Si $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, la série associée converge.

- Critère de comparaison

On se donne deux suites positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout entier n. Si la série associée à v_n converge, alors la série associée à u_n converge. Si la série associée à u_n diverge, alors la série associée à v_n diverge.
A l'aide de ce critère de comparaison, on établit facilement [exercice !] que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ (pour $n \geq 1$) définit une série convergente.
En pratique, l'utilisation du critère de comparaison consiste à chercher la limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$, lorsque le comportement de la série (v_n) est connu. Comparer une suite u_n à la suite géométrique q^n pour étudier la convergence de la série associée est une première étape pour dégrossir le problème, comme d'Alembert et Cauchy l'avaient bien compris !

- Suite de Cauchy

Une suite de Cauchy est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont arbitrairement proches les uns des autres, à condition d'aller assez loin dans la suite :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \geq N$, $|x_p - x_q| < \varepsilon$.
Exemple : la suite des sommes partielles des inverses des factorielles $S_n \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est une suite de nombres rationnels qui est une suite de Cauchy.

- Toute suite convergente est de Cauchy

Si la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors c'est une suite de Cauchy.

• Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy est convergente.
On dit aussi que l'espace $\mathbb{R}$ est complet. La construction des nombres réels permet de "boucher les trous" laissés par les nombres rationnels.
Par exemple, la suite S_n des sommes partielles des inverses des factorielles est une suite de Cauchy de rationnels mais elle ne converge pas dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels [exercice !]. En revanche, elle est convergente dans $\mathbb{R}$ puisque c'est une suite de Cauchy. La somme de la série est nommée e, en hommage à Leonhard Euler (1707 - 1783). En d'autres termes, le nombre $\mathrm{e} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ est irrationnel.

• Convergence absolue
On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série à termes positifs de terme général $|u_n|$ est convergente.

• Une série de nombres réels absolument convergente est convergente
C'est une conséquence du fait que $\mathbb{R}$ est complet. Comme la série de terme général $|u_n|$ est convergente, elle est de Cauchy. Or, l'inégalité triangulaire montre que la valeur absolue du paquet de Cauchy $\sum_{k=p}^{p+m} u_k$ de la série u_n est majoré par le paquet de Cauchy $\sum_{k=p}^{p+m} |u_k|$ de la série $|u_n|$. Donc la série (u_n) définit une suite de Cauchy ; elle converge car $\mathbb{R}$ est complet.

• Extension au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes
Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est de Cauchy si elle satisfait un critère analogue à celui des suites réelles. On remplace simplement la valeur absolue $|\ |$ par le module (même notation !) qui est son extension naturelle aux nombres complexes :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ |z_p - z_q| < \varepsilon.$
L'ensemble des complexes est lui aussi complet : toute suite Cauchy de nombres complexes converge dans $\mathbb{C}$.
Une série u_n de nombres complexes est absolument convergente si la série des modules $|u_n|$ est une série de nombres positifs convergente.
Si la série de nombres complexes u_n est absolument convergente, alors elle définit une série convergente dans $\mathbb{C}$. On remarque que la convergence d'une simple série à termes réels positifs entraîne la convergence de toute la série de nombres complexes, donc de deux (!) séries réelles.
Exemple : la série $\exp(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est absolument convergente. Elle définit la fonction exponentielle.

Exercices

• A propos d'une antique légende indienne
Calculer une valeur approchée de $1+2+4+8+\cdots+2^{64}$.

• Suite récurrente
On se donne un nombre réel x_0 et un nombre réel α positif de sorte que $\alpha \neq 1$. La suite récurrente x_n est définie par la donnée de x_0 et par la relation $x_{n+1} = 1 + \alpha x_n$ si n est un entier naturel. Quel est, en fonction de α, le comportement de la suite x_n si n tend vers $+\infty$?

- Suite contractante

On se donne un réel k tel que $0 \leq k < 1$ et une suite x_n de nombres réels telle que
$|x_{n+1} - x_n| \leq k \; |x_n - x_{n-1}|$ pour n entier ≥ 1.
Montrer, en utilisant le critère de Cauchy, que la suite x_n converge.

- Convergence en moyenne de Cesaro

On se donne une suite x_n de nombres réels telle que x_n converge vers le réel ℓ si l'entier n tend vers l'infini. Pour n entier ≥ 1 on introduit la moyenne des n premiers termes de la suite x_n : $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$.
Démontrer que la suite y_n converge vers ℓ si n tend vers l'infini.

- Suite récurrente et point fixe [novembre 2015]

On se donne un nombre réel a strictement positif, un nombre x_0 strictement positif également et la suite x_n définie par récurrence : $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ si $n \in \mathbb{N}$.
a) Pour $a = 2$ et $x_0 = 1$, calculer x_1 et x_2.
La suite x_n est de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$.
b) Préciser la fonction f et ses points fixes ξ qui satisfont par définition à la relation $f(\xi) = \xi$.
c) Quelle est la valeur de la dérivée $f'(\xi)$ pour les différents points fixes ξ calculés à la question précédente ?
d) Quel commentaire pouvez-vous faire ?
e) Montrer que x_n est strictement positif pour tout entier naturel n.
f) Montrer que pour n positif ou nul, on a $x_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$.
g) En déduire que pour n supérieur ou égal à 1, la suite x_n est décroissante.
h) En conclure que la suite x_n converge et préciser sa limite.

- Divergence de la série harmonique

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.
a) Que vaut $S_2 - S_1$?
b) Montrer que $S_4 - S_2 \geq \frac{1}{2}$.
c) Montrer que $S_8 - S_4 \geq \frac{1}{2}$.
d) Montrer que $S_{16} - S_8 \geq \frac{1}{2}$.
e) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $S_{2^k} - S_{2^{k-1}} \geq \frac{1}{2}$.
f) En déduire qur pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$.
g) Démontrer que la série harmonique S_n diverge, c'est à dire tend vers $+\infty$:
$\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $S_n \geq A$.

- Construction de la fonction exponentielle

On se donne $z \in \mathbb{C}$ et on pose $u_n = \frac{z^n}{n!}$. On se propose de montrer que la série $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ associée converge vers un nombre complexe, noté e^z.
On suppose d'abord $z = N$, entier supérieur ou égal à 1.
a) Montrer que si $n \geq N$, on a $\frac{N^n}{n!} \leq \frac{N^N}{N!} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{n-N}$.
b) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{N^n}{n!}$.

c) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ arbitraire, la série de terme général $u_n = \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

- Une inégalité avec les bornes inférieures

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ minorées : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \alpha \leq x$ et une proprié analogue pour la partie B. On sait alors que A possède une borne inférieure inf(A) qui est un nombre réel défini comme *le plus grand des minorants* de A. D'une part, inf(A) est un minorant de A et l'on a $\inf(A) \leq x, \forall x \in A$. D'autre part, inf($A$) est le plus grand minorant, ce qui implique que tout minorant de A est inférieur ou égal à inf(A) : si α est un nombre réel tel que $\alpha \leq x$ pour tout $x \in A$ alors $\alpha \leq \inf(A)$. On a une construction analogue pour inf(B).

a) Démonter que la partie $A+B$ de $\mathbb{R}$ définie par $A+B = \{x+y, x \in A, y \in B\}$ est minorée.

b) Etablir l'inégalité $\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A+B)$.

- Borne inférieure

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de nombres réels.

Démontrer, en justifiant soigneusement les diverses étapes du raisonnement, que l'on a l'inégalité $\inf_n(a_n+b_n) \geq \left(\inf_n a_n\right) + \left(\inf_n b_n\right)$.

- Convergence d'une série de Riemann

On considère la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$. On définit la somme partielle S_n de la série (v_n) par $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. On introduit également la suite $u_n = \frac{1}{n^2}$ et la somme partielle associée $\Sigma_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) Montrer que la série (v_n) est à termes positifs : on a $v_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

b) Montrer que l'on a $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que la série de terme général v_n est convergente.

d) Quelle est sa limite ?

e) Montrer que pour n entier ≥ 1, on a $u_n \leq 2\,v_n$.

f) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

- Elle converge ou elle diverge ?

On se donne deux nombres réels strictement positifs q et α et on pose $u_n = \frac{q^n}{n^\alpha}$.

Etudier le comportement de la série S_n associée, c'est à dire de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

On s'intéressera à la convergence ou à la divergence de cette série, dans les cas où il est possible de conclure avec les arguments vus pendant le cours.

- Une série géométrique à valeurs complexes

Soit N en entier supérieur ou égal à 1 et θ un nombre réel. On pose $S_N(\theta) = \sum_{k=-N}^{k=+N} \exp(ik\theta)$.

a) Montrer que $S_N(\theta)$ est un nombre réel.

b) Donner une expression de $S_N(\theta)$ en fonction des $\cos \ell\theta$ avec ℓ entier positif inférieur ou égal à N.

c) Que vaut $S_N(0)$?

d) Que vaut $S_N(2\ell\pi)$ pour ℓ entier positif ou négatif ?

e) Si θ est différent de $2\ell\pi$ avec ℓ entier positif ou négatif, montrer que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est non nul.

f) Démontrer que si $\theta \neq 2\ell\pi$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, alors $S_N(\theta) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

• Séries numériques [février 2014]

a) Rappeler rapidement pourquoi la série de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$ diverge.

b) Rappeler rapidement pourquoi la série de terme général $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Pour n entier positif, on pose $w_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |\sin t| \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

c) Montrer que la série de terme général w_n diverge.

Pour n entier positif, on pose $x_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin t \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

d) Montrer que la série de terme général x_n converge.

• Série numérique [avril 2014]

Dans tout cet exercice, la lettre θ désigne un réel qui n'est pas un multiple entier de 2π. Pour n entier supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = \sum_{j=0}^{n} \exp(i\, j\, \theta)$.

a) En utilisant une progression géometrique de raison $\exp(i\,\theta)$, montrer que l'on peut factoriser la somme S_n et préciser l'expression algébrique obtenue.

b) Montrer que la suite S_n est bornée.

On introduit la série numérique de terme général $u_n = \frac{\exp(i\,n\,\theta)}{n}$. On se propose de démontrer que cette série est convergente.

Soient p et m deux entier supérieurs ou égaux à 1. On pose $\Sigma_{pm} = \sum_{j=p+1}^{p+m} u_j$.

c) Après avoir remarqué que $u_j = \frac{S_j - S_{j-1}}{j}$, montrer que l'on peut exprimer la somme partielle Σ_{pm} sous la forme $\Sigma_{pm} = \frac{S_{p+m}}{p+m} + \sum_{j=p+1}^{p+m-1} \frac{S_j}{j(j+1)} - \frac{S_p}{p+1}$.

d) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

• Convergence de la série de terme général $1/(n\sqrt{n})$

On se propose dans cet exercice de démontrer, sans faire appel au critère de comparaison avec une intégrale, que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente. Pour cela, on procède en quatre temps.

Pour n entier ≥ 2, on pose $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que $v_n \geq 0$, que la série de terme général v_n converge et calculer le nombre $\sum_{k=2}^{\infty} v_k$.

b) Montrer que $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}$.

c) Montrer que si $n \geq 2$ on a l'inégalité $n \geq \frac{1}{2}\sqrt{n-1}\,(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})$. En déduire que $\frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}$.

d) Montrer à l'aide d'un critère de comparaison entre deux séries positives que la série de terme général u_n est convergente.

• Séries [novembre 2015]

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. On pose $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $v_k = \frac{1}{k\sqrt{k}}$ et $w_k = \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}$.

a) Montrer que $u_k \geq 0$ et que $\sum_{k=1}^{k=n} u_k = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b) En déduire que la série de terme général u_k converge et préciser sa somme.

c) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $0 \leq v_k \leq 4\,u_k$.

d) Qu'en conclure pour la série de terme général v_k ?

e) Etudier la convergence de la série de terme général w_k.

- Séries absolument convergentes

a) Montrer que la série de terme général $u_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ est convergente.
b) Justifier avec soin votre réponse.
c) On se donne $x \in \mathbb{R}$. Reprendre la question précédente avec $v_k = \frac{\sin(kx)}{(k+1)^2}$.

- Introduction à la convolution discrète

On suppose que la série série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ est absolument convergente. Pour n et m entiers positifs ou nuls, on pose $v_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} a_k \, a_{k+n}$.
a) Montrer que pour n fixé, la suite $v_{n,m}$ converge si m tend vers $+\infty$. On pourra utiliser le critère de Caucly : pour tout entier M et si l'entier m est assez grand, la différence $|v_{n,m+M} - v_{n,m}|$ est arbitrairement petite.
b) En déduire que la suite limite de terme général $u_n \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, a_{k+n}$ est bien définie.
c) Montrer que la suite u_n tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

- Le nombre e est irrationnel

On rappelle que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$ définit une série à termes positifs convergente. Sa somme est notée e. On a $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \simeq 2,718$. On suppose que le nombre e est rationnel. Nous allons démontrer que cette hypothèse est fausse, c'est à dire que le nombre e n'est pas un nombre rationnel.
On suppose donc que le nombre e peut être écrit sous la forme $e = \frac{p}{q}$ pour deux entiers positifs p et q. On pose $A = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ et $B = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$.
a) Montrer que l'entier q est nécessairement supérieur ou égal à 2.
b) Montrer que $q! \, e = A + B$.
c) Montrer que A est un nombre entier.
d) Montrer que B est un nombre entier strictement positif, donc supérieur ou égal à 1.
e) Montrer que $B = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)\,(q+3)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)\,(q+2) ... (q+k)\,(q+k+1)} + \ldots$.
f) En déduire que $B \leq \frac{1}{q+1}\big(1 + \frac{1}{(q+2)} + \frac{1}{(q+2)^2} \cdots + \frac{1}{(q+2)^k} + \ldots\big)$.
g) En utilisant un résultat classique sur les séries géométriques, montrer que $B \leq \frac{q+2}{(q+1)^2}$.
h) Réécrire la relation précédente sous la forme $B \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2}$.
i) En utilisant le fait que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$ est décroissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$, démontrer que $B \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$.
j) Déduire la contradiction des questions d) et i).