

Cours 4 Compacité

- Suites bornés

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est bornée si il existe deux nombres réels m et M de sorte que $m \leq u_n \leq M$ quel que soit l'entier n .

Par exemple, la suite géométrique $u_n = (-1)^n$ de raison -1 est bornée. Si on pose maintenant $v_k = u_{2k}$ et $w_k = u_{2k+1}$, on garde les termes pairs ou les termes impairs de la suite. Alors $v_k = 1$ et $w_k = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Chacune des deux suites extraites est constante, donc converge !

- Sous-suite extraite

On se donne une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique E et une injection (application qui ne prend pas deux fois la même valeur) strictement croissante φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . La suite $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $u'_k = u_{\varphi(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ est dite suite extraite de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ grâce à l'injection φ .

- Valeur d'adhérence

On se donne un espace métrique E et une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E . On dit que α est valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(u_n, \alpha) \leq \varepsilon$.

- Sous-suite extraite et valeur d'adhérence

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de l'espace métrique (E, d) . Si α est une valeur d'adhérence de la suite, on peut trouver une sous-suite extraite $u'_k = u_{\varphi(k)}$ qui converge vers α .

Réciproquement, si il existe une sous-suite extraite u'_k qui converge vers α , alors α est une valeur d'adhérence de la suite initiale $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Par exemple, les suites v_k et w_k extraites de la suite géométrique de raison -1 au premier paragraphe de cette leçon convergent chacune vers une des valeurs d'adhérence de cette suite.

- Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

Soient $a < b$ deux nombres réels et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels incluse dans l'intervalle fermé $[a, b]$: $a \leq u_k \leq b$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a au moins une valeur d'adhérence ; il existe $\alpha \in [a, b]$, tel qu'on peut extraire une sous-suite qui converge vers α .

Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$, on peut considérer une suite extraite de cette suite, c'est à dire une suite obtenue en ne prenant que certains termes de la suite, mais sans avoir le droit de revenir en arrière. Il existe une application strictement croissante φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} de sorte que la suite extraite $u'_k \equiv u_{\varphi(k)}$ converge vers une certaine limite ℓ , comprise entre les nombres a et b .

- Partie compacte d'un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique et K une partie non vide de E . On dit que K est compacte si et seulement si de tout recouvrement ouvert $(\omega_j)_{j \in J}$ de K , c'est à dire $K \subset \cup_{j \in J} \omega_j$, on peut extraire un recouvrement ouvert fini : $\exists N \in \mathbb{N}, \exists j_k \in J, K \subset \cup_{k=1}^N \omega_{j_k}$.

- Toute suite d'un compact a au moins une valeur d'adhérence dans le compact.
- Tout compact d'un espace métrique est borné

Si $K \neq \emptyset$ est un compact de l'espace métrique (E, d) , alors il existe $M \geq 0$, tel que $\forall x, y \in K, d(x, y) \leq M$.

- Tout compact d'un espace métrique est fermé
- Tout compact d'un espace métrique est complet

Toute suite de Cauchy $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ composée d'éléments $u_k \in K \subset E$ du compact K est convergente. Elle a au moins une valeur d'adhérence et converge alors vers cette valeur d'adhérence, qui est alors unique.

- Forme forte du théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit K un espace métrique non vide. Il est compact si et seulement si toute suite de K admet une valeur d'adhérence dans K , c'est à dire si et seulement si de toute suite de K , on peut extraire une sous-suite qui converge vers une limite ℓ qui est un point de K .

- Compacts de \mathbb{R} et \mathbb{R}^n

On se donne un entier $n \geq 1$. Une partie non vide, fermée et bornée de \mathbb{R}^n est compacte. Si $a < b$ sont deux nombres réels, l'intervalle $[a, b]$ est compact dans \mathbb{R} .

- Fonction continue sur un compact

Soit (K, d) un espace métrique compact (non vide), (F, δ) un autre espace métrique et $f : K \rightarrow F$ une application continue de K dans F . Alors l'image directe $f(K) = \{f(x), x \in K\}$ de K par l'application f est un compact de F .

- Une fonction numérique continue sur un compact atteint ses bornes

Soit K une partie compacte non vide d'un espace métrique et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Il existe $x_0 \in K$ et $y_0 \in K$ de sorte que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ pour tout $x \in K$.

- Une fonction continue sur un compact est uniformément continue

Soit (K, d) un espace métrique compact (non vide), (F, δ) un autre espace métrique et $f : K \rightarrow F$ une application continue de K dans F . Alors l'application f est uniformément continue : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in K, d(x, y) < \eta \implies \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exercices

- Non convergence dans le cas de deux valeurs d'adhérence distinctes

On se donne une suite x_n de nombres réels et on introduit la suite particulière utilisée $u_n = (-1)^n$ utilisée dans le cours

- a) Montrer que l'existence d'une limite pour la suite x_n s'écrit

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

- b) Exprimer avec des quantificateurs logiques le fait que la suite u_n n'a pas de limite.
 c) Montrer que pour tout nombre réel ℓ , l'intervalle $]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ ne peut pas contenir à la fois les nombres $+1$ et -1 .
 d) Dédire des questions b) et c) que la suite u_n ne converge pas.

- Parallélogramme

On désigne par K le carré "unité" de \mathbb{R}^2 : $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

- a) L'ensemble K est un compact de \mathbb{R}^2 . Pourquoi ?

On se donne deux vecteurs u et v de \mathbb{R}^2 et on pose $P = \{xu + yv, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

- b) Montrer en le justifiant que P est un compact de \mathbb{R}^2 .

- Ouvert borné de \mathbb{R}

Expliquer pourquoi l'intervalle ouvert $]0, 1[$ n'est pas un compact de \mathbb{R} .

- Fermé dans un compact

Soit F un fermé non vide inclus dans un compact K de l'espace métrique E .

- a) Montrer que F est séquentiellement compact, c'est à dire que toute suite de F admet au moins une valeur d'adhérence dans F .
 b) Montrer que de tout recouvrement ouvert de F , on peut extraire un recouvrement ouvert fini.

- Equivalence des normes dans \mathbb{R}^n

On rappelle que dans \mathbb{R}^n , $\|x\|_\infty = \sup\{|x_j|, j = 1, \dots, n\}$. On introduit le disque unité $D = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq 1\}$. On se donne aussi une norme $\|x\|$ sur \mathbb{R}^n différente *a priori* de la précédente.

- a) Montrer que l'application "norme infinie" : $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\|_\infty \in \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^n muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.
 b) En utilisant le théorème de Bolzano-Weirstrass, démontrer que le disque unité D est un compact de \mathbb{R}^n muni de la topologie associée à la norme $\| \cdot \|_\infty$.
 c) On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}$. Montrer que la sphère unité B est fermée pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^n muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.
 d) En déduire que la sphère unité B est compacte pour la topologie de la norme $\| \cdot \|_\infty$.
 e) Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$.
 f) En déduire que l'application identité $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}^n$ est continue de $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$ sur l'espace normé $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$.
 g) Dédire de la question précédente que la sphère unité B est compacte pour la topologie induite par la norme $\| \cdot \|$ sur \mathbb{R}^n .

h) Rappeler pourquoi l'application "norme" : $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^n muni de la norme $\|\cdot\|$.

i) Dédire des questions précédentes qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|y\| \geq \alpha$ pour tout $y \in B$.

j) Montrer l'équivalence des normes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$.

- Espace vectoriel de dimension finie

On suppose connu le résultat de l'exercice précédent : dans \mathbb{R}^n , toutes les normes sont équivalentes. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n sur \mathbb{R} . On se fixe une base (e_1, \dots, e_n) et si $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ est un vecteur de E , on pose $\|x\|_\infty = \sup\{|x_j|, j = 1, \dots, n\}$. De plus, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\Phi(x_1, \dots, x_n) = x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E$ et on pose enfin $B = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_\infty = 1\}$.

a) Montrer que l'on définit une norme sur E en posant $\|x\|_\infty = \sup\{|x_j|, j = 1, \dots, n\}$.

b) Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$.

c) Montrer que l'application Φ est continue de \mathbb{R}^n muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans E muni de la norme $\|\cdot\|$.

d) Montrer que l'application $E \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est continue sur E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

e) Montrer que $\{\|\Phi(x)\|, x \in B\}$ définit une partie compacte de \mathbb{R} incluse dans $]0, +\infty[$.

f) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \geq \alpha$ pour tout $x \in \Phi(B)$.

g) Montrer l'équivalence des normes : pour tout $x \in E$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$.

- Continuité des applications linéaires en dimension finie

On suppose connu le résultat de l'exercice précédent : dans un espace vectoriel E sur \mathbb{R} de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On se donne une application linéaire A de E de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé F dont on ne précise pas la dimension.

Montrer que A est continue : $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E$.

- Sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé E sur \mathbb{R} dont on ne précise pas la dimension.

a) Montrer que toute suite de F qui converge dans E a une limite qui appartient à F .

b) En déduire que F est fermé dans E .

- Fonctions continues [novembre 2015]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

a) La fonction f a-t-elle nécessairement un maximum ? En d'autres termes, existe-il toujours $x_0 \in [0, 1]$ de sorte que $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq f(x_0)$?

b) Reprendre la question précédente avec f fonction continue de $]0, 1[$ à valeurs dans \mathbb{R} : existe-il nécessairement $x_0 \in]0, 1[$ de sorte que $\forall x \in]0, 1[, f(x) \leq f(x_0)$?

- Une fonction non uniformément continue

a) Montrer que si $|x| \leq 1$, alors $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$.

b) En déduire que si l'on se donne $M \in \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est uniformément continue sur l'intervalle $] -\infty, M]$.

c) Démontrer que la fonction exponentielle n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} :

$\forall \eta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta$ et $|\exp(x) - \exp(y)| \geq 1$.

- Une propriété des matrices symétriques définies positives [février 2016]

Soit n en entier supérieur ou égal à un. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n , on définit le produit scalaire (x, y) des vecteurs x et y par la relation $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ et la norme $\|x\|$ de x par $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. On définit la sphère unité S de \mathbb{R}^n selon

$S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. On se donne une matrice A à n lignes et n colonnes, symétrique, c'est à dire $(Ax, y) = (x, Ay)$ pour tout x et y dans \mathbb{R}^n et définie positive : $(Ax, x) > 0$ si x est un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . Pour x dans \mathbb{R}^n , on pose $f(x) = (Ax, x)$.

- La sphère S est-elle ouverte ? fermée ? bornée ? compacte ?
- On suppose dans cette question (uniquement) $n = 2$. On se donne une suite quelconque de réels $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on pose $x^k = (\cos(\alpha^k), \sin(\alpha^k))$. Montrer que $x^k \in S$ pour tout k et rappeler pourquoi la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet toujours au moins une valeur d'adhérence.
- Montrer que l'application f est continue de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . En déduire qu'elle est continue de S dans \mathbb{R} .
- Montrer qu'il existe α strictement positif de sorte que $\forall x \in S, f(x) \geq \alpha$.
- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n, (Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2$.

- Matrices symétriques [avril 2016]

Pour $X \equiv (x, y)$ vecteur de \mathbb{R}^2 , on introduit la norme euclidienne $\|X\|$ définie par

$$\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}. \text{ On pose } A = \begin{pmatrix} 2 & 1,4 \\ 1,4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que pour tout $X \equiv (x, y)$ vecteur non nul de \mathbb{R}^2 , le produit scalaire (AX, X) est strictement positif.
- En utilisant la compacité de la sphère unité de \mathbb{R}^2 , déduire de la question précédente qu'il existe α strictement positif de sorte que $(AX, X) \geq \alpha \|X\|^2$.
- On cherche à reprendre les questions précédentes en remplaçant la matrice A par la matrice B . A-t-on $(BX, X) > 0$ pour tout X de \mathbb{R}^2 non nul ?

- Théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Pour $x \in E$ et $r > 0$, on note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r : $B(x, r) = \{y \in E, \|y - x\| < r\}$. On admet le résultat d'un des exercices précédents : si F est un sous-espace de dimension finie dans un espace vectoriel normé E , alors il est fermé dans E . Soit U la boule unité fermée définie par

$U \equiv \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$. On suppose que U est compacte. Nous allons montrer qu'alors l'espace E est de dimension finie.

- Si la boule unité fermée U est compacte, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et des vecteurs a_1, \dots, a_N tels que $a_j \in U$ pour tout $j = 1, \dots, N$ et $U \subset \cup_{j \leq N} B(a_j, 1)$.
- Montrer que si l'espace E est de dimension infinie, l'espace $F = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$ généré par a_1, \dots, a_N est fermé dans E .
- En déduire qu'il existe $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ de sorte que $B(x, \varepsilon) \subset F^c$, complémentaire de F dans E .

- d) On introduit la distance $d(x, F)$ de x au sous-espace F : $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
 Montrer que $d(x, F) \geq \varepsilon > 0$.
- e) Montrer qu'alors la boule fermée $\Sigma = \{y \in F, \|x - y\| \leq 2d(x, F)\}$ est compacte.
- f) Démontrer que la fonction $\Sigma \ni y \mapsto \|x - y\| \in \mathbb{R}$ est continue et atteint sa borne inférieure en $y_0 \in \Sigma \subset F$.
- g) On pose $a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$. Montrer que $a \in U$.
- h) Montrer que quelque soit $z \in F$, $\|a - z\| \geq 1$.
- i) Montrer qu'il existe $i \leq N$ tel que $\|a - a_i\| < 1$.
- j) En déduire une contradiction. L'hypothèse faite à la question b) est fausse et l'espace E est de dimension finie.