

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur (MAA106)

Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, le 02 novembre 2021

Une propriété des matrices symétriques définies positives

Soit n en entier supérieur ou égal à un. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n , on définit le produit scalaire (x, y) des vecteurs x et y par la relation $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ et la norme $\|x\|$ de x par $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. On définit la sphère unité S de \mathbb{R}^n selon $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. On se donne une matrice A à n lignes et n colonnes, symétrique, c'est à dire $(Ax, y) = (x, Ay)$ pour tout x et y dans \mathbb{R}^n . On suppose de plus que la matrice A est définie positive : $(Ax, x) > 0$ si x est un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . Pour x dans \mathbb{R}^n , on pose $f(x) = (Ax, x)$.

- a) La sphère S est-elle ouverte ?
- b) La sphère S est-elle fermée ?
- c) La sphère S est-elle bornée ?
- d) La sphère S est-elle compacte ?
- e) On suppose dans cette question (uniquement) $n = 2$. On se donne une suite quelconque de réels $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on pose $x^k = (\cos(\alpha^k), \sin(\alpha^k))$. Montrer que $x^k \in S$ pour tout entier k et rappeler pourquoi la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet toujours au moins une valeur d'adhérence.
- f) Montrer que l'application f est continue de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} .
- g) En déduire que l'application f est continue de S dans \mathbb{R} .
- h) Montrer qu'il existe α strictement positif de sorte que $\forall x \in S, f(x) \geq \alpha$.
- i) Si $\alpha > 0$ désigne le nombre trouvé à la question précédente, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, (Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2$.