le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur (MAA106)

Devoir 3, à rendre pour la séance numéro 10, le 23 novembre 2021

Coordonnées polaires en dimension trois

Pour $(r,\, \theta,\, \varphi)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F(r,\, \theta,\, \varphi) = (r\, \sin\theta\, \cos\varphi,\, r\, \sin\theta\, \sin\varphi,\, r\, \cos\theta)$.

a) Montrer que l'application F est différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer la matrice jacobienne $J(r,\, \theta,\, \varphi)$ fabriquée à partir des dérivées partielles.

c) Pour quelles valeurs du triplet $(r,\, \theta,\, \varphi)$ cette matrice est-elle inversible ?

d) On se donne un point $M = (X,\, Y,\, Z)$ de $\mathbb{R}^3$. Existe-t-il toujours un triplet $(r,\, \theta,\, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ de sorte que $F(r,\, \theta,\, \varphi) = M$?

e) Si $F(r_0,\, \theta_0,\, \varphi_0) = M$, pour quels points M existe-t-il un voisinage V_0 de $(r_0,\, \theta_0,\, \varphi_0)$ et un voisinage W de M de sorte que F soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V_0 sur W ?

Fonctions implicites

On considère le système de deux équations $\sin x + x^4 - y + (\sin\, 2\, y)^3 + t + \frac{\pi}{2} = 0$ et $x + \sin y - x^3 + \cos y + x\, y + t^2 = 1$.

a) Ecrire ce système sous la forme $F(t,\, x,\, y) = 0$ où F est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

b) Montrer que ce système admet le triplet solution $\big(0,\, 0,\, \frac{\pi}{2}\big)$.

c) Montrer que toute solution voisine de ce point s'exprime, pour $|t|$ assez petit, comme une fonction de la forme $(x,\, y) = g(t)$.

d) Que vaut $g'(0)$?

e) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.

François Dubois, 09 novembre 2021.