



**MAA106 - Analyse Mathématique pour l'Ingénieur**

**Examen de première session, 25 janvier 2022**

**Enseignant responsable :**

**François Dubois**

**Durée 3 heures**

**Les calculatrices sont interdites**

**Documents autorisés :**

**notes de cours personnelles**

**et transmises lors des cours,**

**sous forme papier**

**et à l'exclusion de tout autre document.**

**Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.**

**Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.**

**Examen du mardi 25 janvier 2022 (3 heures)**

*Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1) Séries numériques**

- a) On se donne une série  $u_n$  à termes strictement positifs de sorte qu'il existe  $a \in ]0, 1[$  et un entier  $K$  de sorte que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$  dès que  $n \geq K$ . Montrer qu'alors la série de terme général  $u_n$  est convergente.
- b) Si  $v_n = \frac{1}{n^2}$  pour  $n > 0$ , le critère précédent peut-il être utilisé pour étudier la convergence de la série de terme général  $v_n$  ?
- c) On se donne  $x \in \mathbb{R}$  et on pose  $w_n = \frac{x^n}{n!}$ . Démontrer que la série de terme général  $w_n$  est absolument convergente.

**Exercice 2) Compacité**

On considère les parties  $E$  et  $F$  du plan  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^4 \leq 1\} \text{ et } F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}.$$

- a) Dessiner l'allure de l'ensemble  $E$ .
- b) Montrer que l'ensemble  $F$  n'est pas vide.
- c) L'ensemble  $E$  est-il fermé ?
- d) L'ensemble  $F$  est-il fermé ?
- e) L'ensemble  $E$  est-il borné ?
- f) L'ensemble  $F$  est-il borné ?
- g) L'ensemble  $E$  est-il compact ?
- h) L'ensemble  $F$  est-il compact ?

**Exercice 3) Fonction implicite**

On se donne un nombre réel  $x$  et on cherche à résoudre l'équation d'inconnue réelle  $y$  :

$$x + y + \sin(xy) = 0.$$

- a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme  $f(x, y) = 0$ , où l'on précisera la fonction de deux variables  $f$ .
- b) Que peut-on dire de  $f(0, 0)$  et de  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  ?

- c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation  $x + y + \sin(xy) = 0$  peut-être résolue sous la forme  $y = g(x)$  avec des hypothèses que l'on précisera.
- d) Que vaut  $g(0)$  ?
- e) Que vaut  $g'(0)$  ?

#### Exercice 4) Intégrale d'ordre fractionnaire

On rappelle que pour  $x > 0$ , la fonction gamma est définie par  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$ . On admet dans la suite que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . On définit l'intégrale fractionnaire  $I^{1/2}f$  d'une fonction  $f$  par la relation  $(I^{1/2}f)(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\theta)}} f(\theta) d\theta$ .

- a) On pose  $g(t) = \sqrt{t}$  si  $t > 0$  et  $g(t) = 0$  si  $t \leq 0$ . Calculer, en justifiant avec soin votre réponse,  $(I^{1/2}g)(t)$  en fonction du nombre réel  $t$ .

On définit maintenant une variante  $Jf$  de l'intégrale fractionnaire  $I^{1/2}f$  par la relation

$$(Jf)(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\theta)}} f(\theta) d\theta.$$

- b) Si  $f(t) = \exp(t)$ , démontrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le nombre  $(Jf)(t)$  est bien défini.
- c) Montrer que si  $f(t) = \exp(t)$ ,  $(Jf)(t) = \exp(t)$ .
- d) On se donne un nombre réel  $\lambda > 0$  et on pose  $g(t) = \exp(\lambda t)$ . Calculer en fonction du nombre réel  $t$ , le nombre  $(Jg)(t)$ .