



**MAA106 - Analyse Mathématique pour l'Ingénieur**

**Examen première session, 28 janvier 2020**

**Enseignant responsable :**

**François Dubois**

**Durée 3 heures**

**Les calculatrices sont interdites**

**Documents autorisés :**

**notes de cours personnelles**

**et transmises lors des cours,**

**sous forme papier**

**et à l'exclusion de tout autre document.**

**Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.**

**Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.**

**Examen du mardi 28 janvier 2020 (3 heures)**

*Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1) Topologie**

On considère les parties  $E$  et  $F$  du plan  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x^2 \leq y \leq x^2\} \text{ et } F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x^2 < y < x^2\}.$$

- a) Dessiner rapidement l'ensemble  $E$ .
- b) Montrer que l'ensemble  $F$  n'est pas vide.
- c) Le point  $(0, 0)$  appartient-il à l'ensemble  $F$  ?
- d) L'ensemble  $E$  est-il borné ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ? On justifiera avec soin chacune des réponses.
- e) L'ensemble  $F$  est-il borné ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ? Une justification des réponses est également demandée.

**Exercice 2) Résolution d'une famille d'équations**

Pour  $X \equiv (x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $\|X\| = \max(|x|, |y|)$ . On se donne  $t$  réel arbitraire et on définit l'application  $f_t$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f_t(X) = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}\sin(x+y) + t - 3, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\cos(x-y) + t^2 + 7\right).$$

- a) Pour tout  $\alpha, \beta$ , rappeler les expressions de  $\sin \alpha - \sin \beta$  et  $\cos \alpha - \cos \beta$  en fonction des lignes trigonométriques de  $\frac{\alpha+\beta}{2}$  et  $\frac{\alpha-\beta}{2}$ .
- b) Montrer que pour tout  $x, y, x'$  et  $y'$  dans  $\mathbb{R}$ , on a l'estimation  $|\sin(x+y) - \sin(x'+y')| \leq 2 \left|\sin\left(\frac{x-x'+y-y'}{2}\right)\right|$ .
- c) Même question pour l'estimation  $|\cos(x-y) - \cos(x'-y')| \leq 2 \left|\sin\left(\frac{x-x'-(y-y')}{2}\right)\right|$ .
- d) Sachant que pour tout nombre réel  $\theta$  on a  $|\sin \theta| \leq |\theta|$ , déduire des questions b) et c) que pour  $X \equiv (x, y)$  et  $X' \equiv (x', y')$ , on a  $|\sin(x+y) - \sin(x'+y')| \leq 2 \|X - X'\|$  et  $|\cos(x-y) - \cos(x'-y')| \leq 2 \|X - X'\|$ .
- e) Déduire des questions précédentes que l'application  $f_t$  est contractante : pour  $X$  et  $X'$  arbitraires dans  $\mathbb{R}^2$ , on a  $\|f_t(X) - f_t(X')\| \leq \frac{5}{6} \|X - X'\|$ .
- f) Montrer que pour tout réel  $t$ , il existe un unique couple de réels  $(x_t, y_t)$  de sorte que  $\frac{1}{2}y_t - x_t + \frac{1}{6}\sin(x_t + y_t) + t = 3, \quad -\frac{1}{3}x_t + y_t - \frac{1}{4}\cos(x_t - y_t) - t^2 = 7.$

### Exercice 3) Calcul d'une famille de Laplaciens

Pour  $X \equiv (x, y, z)$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\alpha$  réel, on pose  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $\varphi(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\alpha = r^\alpha$ .

- Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y}$  et  $\frac{\partial r}{\partial z}$ .
- En déduire la valeur des dérivées partielles  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ .
- Calculer les dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ .
- On pose  $\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ . Calculer  $\Delta \varphi$  en fonction de  $r$  et de  $\alpha$ .
- Que se passe-t-il pour  $\alpha = 2$  ?
- Que se passe-t-il pour  $\alpha = -1$  ?

### Exercice 4) Transformation de Fourier

On se donne  $T > 0$  et on définit la fonction porte  $P_T$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par les relations  $P_T(t) = 1$  si  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  et  $P_T(t) = 0$  si  $|t| > \frac{T}{2}$ .

- Montrer que la fonction  $P_T$  appartient à l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ .
- En déduire l'expression  $\widehat{P}_T(\xi)$  de sa transformée de Fourier pour tout nombre réel  $\xi$ .
- La fonction  $P_T$  appartient-elle à l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  ?
- À l'aide du théorème de Plancherel, calculer la norme  $L^2$  de la transformée de Fourier  $\widehat{P}_T$ .
- En déduire une expression algébrique simple de l'intégrale  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi$ .

### Exercice 5) Dérivation d'une série

Pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3}$ .

- Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , la relation  $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3}$  définit bien un nombre réel  $f(x)$ .
- A l'aide d'un résultat du cours qui devra être énoncé avec précision, montrer que la fonction  $f$  est continue.
- Démontrer que la fonction  $f$  est dérivable. On utilisera un autre résultat du cours qui devra lui-aussi être énoncé avec précision.
- Préciser l'expression de la dérivée  $f'(x)$  à l'aide d'une série.
- Avec les résultats du cours utilisés dans les questions précédentes, que peut-on dire de la dérivée seconde de la fonction  $f$  ?