



MAA106 - Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Examen de seconde session, 26 avril 2022

Enseignant responsable :

François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles

et transmises lors des cours sous forme papier

à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

Examen du mardi 26 avril 2022 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Séries numériques

On considère la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$. On définit la somme partielle S_n de la série (v_n) par $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. On introduit également la suite $u_n = \frac{1}{n^2}$ et la somme partielle associée $\Sigma_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

- a) Montrer que la série (v_n) est à termes positifs : on a $v_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
- b) Montrer que l'on a $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
- c) En déduire que la série de terme général v_n est convergente.
- d) Quelle est sa limite ?
- e) Montrer que pour n entier ≥ 1 , on a $u_n \leq 2v_n$.
- f) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2) Topologie

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On pose également $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$.

- a) Démontrer que f est différentiable en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- b) Quelle est la différentielle $df(x, y)$ de l'application f au point (x, y) ?
- c) La fonction f est-elle continue en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$?
- d) L'ensemble A est-il ouvert ? Justifier avec soin votre réponse.
- e) L'ensemble A est-il fermé ? Justifier avec soin votre réponse.
- f) L'ensemble B est-il ouvert ? Justifier avec soin votre réponse.
- g) L'ensemble B est-il fermé ? Justifier avec soin votre réponse.

Exercice 3) Calcul d'une famille de Laplaciens

On désigne par $\log$ le logarithme népérien. Pour $X \equiv (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ et α réel, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi(x, y) = (\log(\sqrt{x^2 + y^2}))^\alpha$. On pose également $\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

- a) Montrer que $\varphi(x, y) = (\log r)^\alpha$.
- b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$.

- c) En déduire la valeur des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.
- d) Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.
- e) Calculer $\Delta \varphi$ en fonction de r et de α .
- f) Que se passe-t-il pour $\alpha = 1$?

Exercice 4) Dérivation d'une intégrale

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on pose (1) $f(x) = \int_0^1 t^2 \sin\left(\frac{x}{t}\right) dt$.

- a) Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, la relation (1) définit bien un nombre réel $f(x)$.
- b) A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la fonction f est continue. On justifiera avec soin l'utilisation d'un résultat du cours qui devra aussi être énoncé avec précision.
- c) Montrer que la fonction f est dérivable. On justifiera avec soin l'utilisation d'un résultat du cours qui devra aussi être énoncé avec précision.
- d) Donner l'expression de la dérivée $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
- e) A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la fonction f' est continue. On justifiera avec soin l'utilisation d'un résultat du cours qui devra aussi être énoncé avec précision.
- f) Montrer que la fonction f' est dérivable. On justifiera avec soin l'utilisation d'un résultat du cours qui devra aussi être énoncé avec précision.
- g) Donner l'expression de la dérivée seconde $f''(x)$ à l'aide d'une intégrale.
- h) Que peut-on dire de la dérivée troisième de la fonction f ?