

Examen du mardi 30 juin 2020 (3 heures)

Cette épreuve se déroule en temps limité, à distance et sans surveillance particulière. Merci de bien respecter la durée de 3 heures. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1) Topologie

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

a) Démontrer que f est différentiable en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et expliciter la différentielle $df(x, y)$.

b) La fonction f est-elle continue en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$?

On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$.

c) L'ensemble A est-il ouvert ?

d) L'ensemble A est-il fermé ?

e) L'ensemble B est-il ouvert ?

f) L'ensemble B est-il fermé ?

Exercice 2) Fonctions implicites

On considère le système de deux équations $\sin x + x^4 - y + (\sin 2y)^3 + t + \frac{\pi}{2} = 0$ et $x + \sin y - x^3 + \cos y + xy + t^2 = 1$.

a) Ecrire ce système sous la forme $F(t, x, y) = 0$ où F est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

b) Montrer que ce système admet le triplet solution $(t, x, y) = (0, 0, \frac{\pi}{2})$.

c) Montrer que toute solution (t, x, y) voisine de ce point s'exprime, pour $|t|$ assez petit, avec une expression de la forme $(t, x, y) = (t, g(t), h(t))$.

d) Que valent $g'(0)$ et $h'(0)$?

Exercice 3) Calcul d'une famille de Laplaciens

On désigne par $\log$ le logarithme népérien. Pour $X \equiv (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ et α réel, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi(x, y) = (\log(\sqrt{x^2 + y^2}))^\alpha$.

a) Montrer que $\varphi(x, y) = (\log r)^\alpha$.

b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$.

c) En déduire la valeur des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

d) Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

On pose $\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

e) Calculer $\Delta \varphi$ en fonction de r et de α .

f) Que se passe-t-il pour $\alpha = 1$?

Exercice 4) Transformation de Fourier

On se donne $T > 0$ et on définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par les relations $f(t) = 1$ si $0 < t < T$, $f(t) = -1$ si $-T < t < 0$ et $f(t) = 0$ si $|t| > T$.

a) Montrer que la fonction f appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

b) En déduire l'expression $\widehat{f}(\xi)$ de sa transformée de Fourier pour tout nombre réel ξ .

c) La fonction f appartient-elle à l'espace $L^2(\mathbb{R})$?

d) En déduire une expression analytique de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^2} d\xi$.

Exercice 5) Dérivation d'une série

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}$.

a) Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, la relation $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}$ définit bien un nombre réel $f(x)$.

b) A l'aide d'un résultat du cours qui devra être énoncé avec précision, montrer que la fonction f est continue.

c) Démontrer que la fonction f est dérivable. On utilisera un autre résultat du cours qui devra lui-aussi être énoncé avec précision.

d) Préciser l'expression de la dérivée $f'(x)$ à l'aide d'une série.

e) Avec les résultats du cours utilisés dans les questions précédentes, que peut-on dire de la dérivée seconde de la fonction f ?