

COURS 13

Espaces de Hilbert pour les séries de Fourier

- Séries de Fourier
- Convergence de la série de Fourier
- Espaces de Hilbert
- Familles orthonormées
- Applications
- Méthodes spectrales

Ami

ch(13)

Espaces de Hilbert pour
les séries de Fourier.

• Séries de Fourier

On se donne $T > 0$ et $f \in L^2([0, T[, \mathbb{C}) \equiv L^2(0, T)$, car il est plus simple d'un point de vue algébrique de travailler avec des fonctions à valeurs complexes. Dans $L^2(0, T)$, on dispose du produit scalaire hermitien

$$(1) \quad (f, g) = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L^2(0, T)$$

ainsi que de la norme associée

$$(2) \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt}, \quad f \in L^2(0, T).$$

* On introduit la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ des fonctions exponentielles:

$$(3) \quad e_k(t) = \exp\left(2i\pi k \frac{t}{T}\right), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$$

qu'on peut voir comme fonction $\in L^2(0, T)$ ou bien comme fonction périodique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période T . Les fonctions $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont orthogonales; en effet,

$$(e_k, e_l) = \int_0^T \exp 2i\pi(k-l)\frac{t}{T} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ T & \text{si } k = l \end{cases} \quad 2$$

Avec le symbole de Kronecker δ_{kl} égal à 1 si $k=l$ et 0 si $k \neq l$, on a donc

$$(4) \quad (e_k, e_l) = T \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Les fonctions $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une famille orthogonale; on pourrait les normer en les divisant par $\sqrt{T}$.

- Dans un espace comme $L^2(0, T)$ où l'on dispose d'un produit scalaire, on peut faire de la géométrie euclidienne comme dans l'espace $\mathbb{R}^3$ familier. On introduit l'espace P_N engendré par la sous famille finie des e_k pour $|k| \leq N$ (avec N entier fixé):

$$(5) \quad P_N = \langle e_{-N}, e_{-N+1}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_N \rangle,$$

soit l'espace

$$P_N = \left\{ \sum_{|k| \leq N} \alpha_k e_k, \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}$$

des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $2N+1$.

- * Nous cherchons $g_N \in P_N$ "la plus proche de $f \in L^2(0, T)$ (arbitraire):

$$(6) \quad g_N \in P_N, \quad \|f - g_N\|_2 \leq \|f - \varphi\|_2, \quad \forall \varphi \in P_N.$$

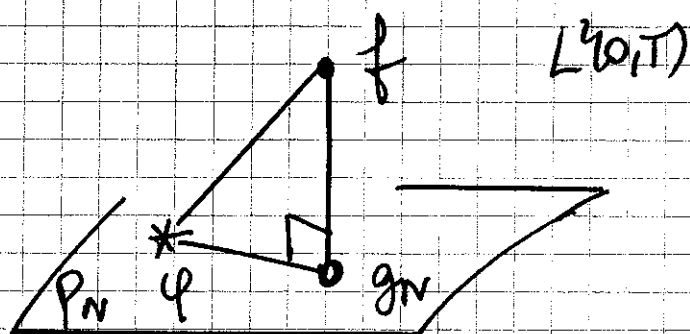


Figure 1 Projection orthogonale de f sur l'espace P_N des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

La figure 1 illustre le problème de minimisation (6). Le point qui portait sur que la représentation de la fonction $f \in L^2(0, T)$ sur celle d'un simple point dans un espace euclidien, de grande dimension tout de même !

On calcule $\|f - \varphi\|_2^2$ pour $\varphi = g_N + \theta \psi$ avec $\psi \in P_N$ arbitraire également et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_2^2 &= \|f - g_N\|_2^2 + (f - g_N, \theta \psi) + (\theta \psi, f - g_N) + \theta^2 \|\psi\|_2^2 \\ &= \|f - g_N\|_2^2 + \theta [(f - g_N, \psi) + \overline{(f - g_N, \psi)}] + \theta^2 \|\psi\|_2^2 \\ &= \|f - g_N\|_2^2 + 2\theta \operatorname{Re}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \|\psi\|_2^2. \end{aligned}$$

De (6) on déduit

$$(7) \quad 2\theta \operatorname{Re}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \|\psi\|_2^2 \geq 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall \psi \in P_N.$$

Ce polynôme réel en θ ne peut être positif pour tout réel θ que si le coefficient de θ est nul, donc $\operatorname{Re}(f - g_N, \psi) = 0$.

On reprend l'inégalité (6) avec $\varphi = g_N - i\theta\psi$ 4
 cette fois ($\theta \in \mathbb{R}$ et $\psi \in P_N$ arbitraire) on a
 alors

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_2^2 &= \|f - g_N\|_2^2 + (f - g_N, i\theta\psi) + (i\theta\psi, f - g_N) + \theta^2 \|\psi\|_2^2 \\ &= \|f - g_N\|_2^2 - i\theta [(f - g_N, \psi) - \overline{(f - g_N, \psi)}] + \theta^2 \|\psi\|_2^2 \\ &= \|f - g_N\|_2^2 + 2\theta \operatorname{Im}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \|\psi\|_2^2 \end{aligned}$$

et la condition $\|f - \varphi\|_2^2 \geq \|f - g_N\|_2^2$ entraîne

$$(8) \quad 2\theta \operatorname{Im}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \|\psi\|_2^2 \geq 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall \psi \in P_N.$$

De même que plus haut, $\operatorname{Im}(f - g_N, \psi) = 0$
 Nous venons de montrer la

Prop Orthogonalité au minimum

Soit g_N une solution éventuelle du problème de minimisation (6). Alors la fonction $f - g_N$ est orthogonale à P_N :

$$(9) \quad (f - g_N, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in P_N.$$

- La relation (9) permet de calculer la fonction g_N sans difficulté on la développe dans la base des $(e_k)_{|k| \leq N}$:

$$g_N = \sum_{|k| \leq N} \alpha_k e_k$$

puis on calcule le produit scalaire (g_N, e_j) .

Compte tenu de la relation d'orthogonalité (4), il ne reste qu'une seule terme et l'on a

$$(g_N, e_j) = \alpha_j^T, \quad |j| \leq N.$$

Pour ailleurs, $(f, e_j) = \int_0^T f(t) e^{-2i\pi j \frac{t}{T}} dt$,
donc la condition $(f - g_N, e_j) = 0$ entraîne

$$\alpha_j = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-2i\pi j \frac{t}{T}) dt, \quad |j| \leq N.$$

* on introduit le k^{o} coefficient de Fourier:

$$(10) \quad \hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi k \frac{t}{T}} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Alors la solution $g_N \in P_N$ du problème (6) s'écrit nécessairement

$$(11) \quad g_N = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e_k, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Prop

Solution du problème de minimisation

Soit $g_N \in P_N$ la fonction donnée en (11) à l'aide des coefficients de Fourier $\hat{f}_k$ introduits à la relation (10). Alors g_N est la solution du problème d'optimisation (6).

- La preuve consiste à calculer $\|f - g\|_2^2$ pour $g \in P_N$ arbitraire. On a

$f - \varphi = (f - g_N) + (g_N - \varphi)$, donc

$$\|f - \varphi\|_2^2 = \|f - g_N\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(f - g_N, g_N - \varphi) + \|g_N - \varphi\|_2^2.$$

Mais $g_N - \varphi \in P_N$ et $f - g_N$ est orthogonal à P_N par construction de g_N . Donc $(f - g_N, g_N - \varphi) = 0$ si $\varphi \in P_N$ et on a

$$(12) \quad \|f - \varphi\|_2^2 = \|f - g_N\|_2^2 + \|g_N - \varphi\|_2^2, \quad \varphi \in P_N,$$

relation qui ne fait qu'exprimer le théorème de Pythagore, ainsi qu'illustré à la figure 1. La relation (6) se déduit immédiatement de (12) et la proposition est établie. $\square$

Prop Inégalité de Bessel.

on a l'inégalité suivante, avec $N \in \mathbb{N}$ arbitraire :

$$(13) \quad \sum_{|k| \leq N} |\hat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

• La preuve consiste à utiliser la relation (12) avec $\varphi = 0 \in P_N$. on a alors $\|g_N\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$.

or

$$\begin{aligned} \|g_N\|_2^2 &= \left(\sum_j \hat{f}_j e_j, \sum_k \hat{f}_k e_k \right) \\ &= \sum_{j,k} \hat{f}_j \hat{f}_k \underbrace{(e_j, e_k)}_{\delta_{jk}} = \sum_k |\hat{f}_k|^2 T \end{aligned}$$

et $\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt$. La relation (13) s'en déduit immédiatement. $\square$

• Convergence de la série de Fourier.

Jusqu'ici, l'entier N était fixé. Considérons maintenant la fonction $g_n \in L^2(0, T)$ donnée par la relation (11), avec les coefficients de Fourier $\hat{f}_k$ donnés par la relation (10) et satisfaisant à l'inégalité de Bessel (13).

* Il est remarquable que ces coefficients de Fourier $\hat{f}_k$, introduits lors d'un problème de minimisation dans un espace dont la dimension est paramétrée par un entier N , ne dépendent pas de cet entier. C'est une conséquence de l'orthogonalité (4) qui simplifie les calculs algébriques et justifie en fait l'emploi des séries de Fourier!

⑦ Convergence de la série de Fourier.

Avec les données rappelées ci-dessus, il existe $g \in L^2(0, T)$ de sorte que $g_n \rightarrow g$ dans $L^2(0, T)$ si $n \rightarrow +\infty$:

$$(14) \quad g_n \rightarrow g \in L^2(0, T), \quad n \rightarrow \infty.$$

- La preuve résulte du théorème (très fort!) étudié lors d'une leçon antérieure que l'espace $L^2(0, T)$ est complet. Il suffit donc de s'intéresser au critère de Cauchy pour la suite g_n qui est la somme (partiel.) de la série $\sum \hat{f}_k e_k$; Pour $\varepsilon > 0$, on cherche N de sorte que si $p \geq N$ et $m \geq 0$, on ait $\|g_{p+m} - g_p\|_2 \leq \varepsilon$. or si $m \geq 0$, on a facilement d'après (11) :

$$g_{p+m} - g_p = \sum_{p+1 \leq |k| \leq p+m} \hat{f}_k e_k$$

d'où

$$(15) \quad \|g_{p+m} - g_p\|_2^2 = T \sum_{p+1 \leq |k| \leq p+m} |\hat{f}_k|^2$$

- * L'inégalité de Bessel (13) entraîne que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$ est convergente puis que toutes les sommes partielles sont majorées par le réel fixé $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$. Donc cette suite satisfait au critère de Cauchy et en particulier les sommes $\sum_{p+1 \leq |k| \leq p+m} |\hat{f}_k|^2$ sont arbitrairement petits dès que p est assez grand. Donc le membre de droite de (15) est $\leq \varepsilon^2$ si $p \geq N$ fixé juste au dessus. Le résultat est établi. $\square$

- Attention! on ne peut en général rien dire des valeurs ponctuelles de $g(t)$, 9

$$(16) \quad g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k(t)$$

On sait simplement que $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k$ a un sens dans $L^2(0, T)$,

$g_n = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k$ converge dans $L^2(0, T)$ vers g , donc une sous-suite

g_{n_k} converge presque partout. Et l'on n'a pas miracles, comme le montre par exemple le phénomène de Gibbs. Pour ces questions, nous renvoyons au livre de Rudin V.

(analyse réelle et complexe, Masson, Paris, 1978) et (pour les questions plus pratiques) à celui de C. Gasquet et P. Witomski (analyse de Fourier et applications, Dunod, Paris, 2000).

- Une question naturelle est de savoir si $g = f$ ou si l'on a "oublié" des fonctions en "projectant" f sur les polynômes trigonométriques. Notons S cet espace:

$$(17) \quad S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

Si $p \in S$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_k \in \mathbb{C}$ pour $|k| \leq n$ de sorte que $p = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k e_k$.

- Nous avons besoin d'un double résultat de densité, démontré dans les deux ouvrages cités plus haut, que le lecteur "fana" pourra consulter avec profit.
- * On note $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont périodiques et de période T .

(Th) Densité des polynômes trigonométriques

- * L'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ est dense dans $L^2(0, T)$: pour $f \in L^2(0, T)$ arbitraire et $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\tilde{f}$ continue $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(T)$ (pour garantir que la fonction rendue périodique est bien continue) et $\|f - \tilde{f}\|_2 < \varepsilon$.
- * L'espace S des polynômes trigonométriques introduit en (17) est dense dans l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ des fonctions continues et périodiques de période T . Pour $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, et $\varepsilon > 0$ donné, il existe $p \in S$ de sorte que $\|p - \tilde{f}\|_\infty < \varepsilon$.

- Le premier point est un résultat classique d'approximation dans les espaces $L^p(\Omega)$ sur lequel nous n'avons pas insisté. Le second point

est un résultat classique d'approximation uniforme d'une fonction continue par sa série de Fourier. Nous l'admettons, uniquement faute de temps, afin de nous concentrer sur la théorie hilbertienne.

Corollaire. L'espace S des polynômes trigonométriques est dense dans $L^2[0, T]$:

$$(18) \quad \forall f \in L^2[0, T], \forall \varepsilon > 0, \exists p \in S, \|f - p\|_2 < \varepsilon.$$

- La preuve résulte bien entendu des points précédents. On a d'une part $\tilde{f} \in C^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ de sorte que $\|f - \tilde{f}\|_2 < \varepsilon/2$. Puis on approche $\tilde{f}$ par $p \in S$ de sorte que $\|\tilde{f} - p\|_\infty \leq \varepsilon/2\sqrt{T}$. Alors $\int_0^T |\tilde{f} - p|^2 dt \leq T \|\tilde{f} - p\|_\infty^2 \leq \varepsilon^2/4$ et $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon/2$. d'après la relation (18) résulte alors de l'inégalité triangulaire. $\square$

- Il reste à relier divers concepts:

(i) l'espace S est total, au sens que son orthogonal $S^\perp$, défini par

$$(19) \quad S^\perp = \{ \varphi \in L^2, \forall p \in S, (\varphi, p) = 0 \},$$

est réduit à $\{0\}$

(ii) l'espace S est dense, ou au corollaire précédent (relation (18))

(iii) l'inégalité de Bessel (13) "devient une égalité" pour $N \rightarrow \infty$:

$$(20) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

(iv) Cette conservation de la norme se traduit aussi par la conservation du produit scalaire, ce qui constitue l'identité de Bessel-Parseval:

$$(21) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L^2(0, T)$$

⑫ Formulations multiples de la densité.

Les quatre propriétés (i) à (iv) énoncées plus haut sont équivalentes.

- La preuve est un cas particulier d'un résultat général valable dans tout espace de Hilbert. Nous le verrons un peu plus loin dans ce chapitre.

- Comme S , espace des polynômes trigonométriques est dense dans $L^2(0, T)$ (cf. (18)), cette famille de fonctions est effectivement "totale" ou "complète". En projetant sur l'espace P_n (voir le début de ce chapitre) avec n de plus en plus grand, on approche effecti-

vement de mieux en mieux la fonction f .
 La relation (20) exprime la conservation de la norme et (21) du produit scalaire. Surtoput,
 la transformation de Fourier

$$(22) L^2(0, T) \ni f \mapsto \hat{f} = (\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

définit une isométrie entre les deux espaces (de Hilbert) $L^2(0, T)$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ des séries de carré convergent.

• Espaces de Hilbert

Introduit par D. Hilbert au début du 20^e siècle, cette notion permet de généraliser sans peine la notion de série de Fourier. De plus, elle étend le fait que les espaces fonctionnels peuvent être représentés très simplement avec essentiellement, de la géométrie euclidienne (!).

* Produit scalaire hermitien.

Nous présentons ici (par souci de cohérence) la théorie dans le cas du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Le lecteur pourra réécire lui-même (c'est un excellent exercice!) l'ensemble des axiomes et des résultats dans le cas où le corps de base est celui des nombres réels.

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$; on le suppose muni d'un produit scalaire hermitien; i.e. une fonction $(\cdot, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{C}$;
 $H \times H \ni (x, y) \mapsto (x, y) \in \mathbb{C}$ de sorte que

$$(23) \quad (y, x) = \overline{(x, y)}$$

$$(24) \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \quad (\lambda x, y) = \lambda (x, y) \\ \text{(linéarité à gauche)}$$

$$(25) \quad (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2), \quad (x, \lambda y) = \overline{\lambda} (x, y) \\ \text{(anti-linéarité à droite)}$$

$$(26) \quad (x, x) \equiv \|x\|^2 \geq 0 \quad \text{(norme)}$$

$$(27) \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

* Alors $(H, (\cdot, \cdot))$ on dit pré-hilbertien. On déduit de l'inégalité de Cauchy Schwarz:

$$(28) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad x, y \in H$$

et de l'inégalité triangulaire:

$$(29) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in H.$$

Nous conseillons au lecteur de prendre le temps de démontrer ces deux propriétés; ce sont des exercices classiques "de premier cycle", i.e. supposés connus avant le début de ce cours d'analyse mathématique pour l'ingénieur.

- Le théorème de projection en un point très important. Auparavant, on dit que H est un espace de Hilbert si $(H, \|\cdot\|)$, espace normé pour la norme introduite à la relation (26) est un espace complet, i.e. toute suite de Cauchy y est convergente.
- * Soit M un sous-espace vectoriel de H . On dit que M est fermé si toute suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans H vers une limite $f \in H$ est tel que f appartient à l'espace M lui-même. Les limites de suites de M appartiennent encore à M .

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \text{ fermé} \Leftrightarrow \\ (f_k \in M, f_k \rightarrow f \text{ dans } H) \Rightarrow (f \in M) \end{array} \right.$$

(H2) de projection sur un sous-espace fermé

Soit $M \subset H$ un sous-espace fermé de H .
alors il existe deux projecteurs $P: H \rightarrow M$ et $Q: H \rightarrow M^\perp$ de sorte que

$$(31) \quad x = Px + Qx, \quad x \in H, \quad Px \in M, \quad Qx \in M^\perp$$

$$(32) \quad \|x - Px\| = \inf \{ \|x - y\|, y \in M \}$$

$$(33) \quad \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2, \quad x \in H$$

- La preuve n'est pas détaillée ici. À la relation (6), nous avons posé un problème de type (32), qui est un cas particulier de ce théorème général, avec $H = L^2(\Omega, T)$, $M = P_N$. Alors $g_N = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}_k e_k$ est le projecteur Pf de $f \in L^2(\Omega, T)$ sur le sous-espace P_N .

(H) de représentation de Riesz

Soit H' l'espace des formes linéaires $\varphi: H \rightarrow \mathbb{C}$ continues: $\varphi(x)$ dépend linéairement de $x \in H$ et φ est continue:

$$(34) \quad \exists C \geq 0, \forall x \in H, |\varphi(x)| \leq C \|x\|.$$

Alors $\varphi \in H'$ peut être représentée de façon unique par $y \in H$:

$$(35) \quad \exists! y \in H, \forall x \in H, \varphi(x) = (x, y).$$

Une des conséquences de ce théorème très puissant est que la notion - même de "forme linéaire" a mis du temps à émerger au sein de la pensée mathématique!

• Familles orthonormées

(def) Une famille orthonormée $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans l'espace de Hilbert H est une suite

conditions suivantes sont équivalentes :

- la famille $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est totale

$$(38) \quad ((\varphi, u_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\varphi = 0).$$

- l'espace S des combinaisons linéaires finies d'éléments de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dense dans H :

$$(39) \quad \forall \varphi \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \exists \alpha_k, \left\| \varphi - \sum_0^N \alpha_k u_k \right\| < \varepsilon$$

- la somme des coefficients de Fourier $\hat{x}_k$ causés de introduits en (37) est égale à $\|x\|^2$:

$$(40) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} |\hat{x}_k|^2 = \|x\|^2, \quad x \in H$$

- identité de Bessel - Parseval

$$(41) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{x}_k \overline{\hat{y}_k} = (x, y), \quad x, y \in H.$$

- La preuve est cyclique. Nous montrons que $(38) \Rightarrow (39) \Rightarrow (40) \Rightarrow (41) \Rightarrow (38)$ (et suivons Rudin page 82).

* $(38) \Rightarrow (39)$.

Montrons que S est dense. Soit M l'adhérence de S , i.e. l'ensemble de toutes les limites des suites $f_k \in S$ qui convergent dans H . Si $M \neq H$ (i.e. si S n'est pas dense), alors son orthogonal $M^\perp$ contient au moins

un vecteur non nul, comme le montre le théorème de projection. Mais alors la relation (38) est en défaut, ce qui montre que votre hypothèse de travail est fautive. Donc $M=H$, ce qui exprime la densité de S , et se traduit par la relation (39).

* (39) $\Rightarrow$ (40)

Si $x \in H$, on construit comme au début de ce chapitre son projeté y_n sur $S_n \equiv \langle u_0, \dots, u_n \rangle$. On a alors (avec (37) cette fois) $y_n = \sum_{k=0}^n \hat{x}_k u_k$, $\|x - y_n\| \leq \|x - y\|$, $\forall y \in S_n$ et l'orthogonalité $\|x - y\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|y_n - y\|^2$ si $y \in S_n$. On en déduit l'inégalité de Bessel (prendre $y=0$):

$$(42) \quad \sum_{k \leq n} |\hat{x}_k|^2 \leq \|x\|^2, \quad n \in \mathbb{N}, x \in H.$$

* Si l'espace S est dense, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire et $x \in H$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in S_n$ de sorte que $\|x - \varphi\| < \varepsilon$. Alors $\|x - y_n\| \leq \|x - \varphi\| < \varepsilon$ et $\|x\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|y_n\|^2 \leq \varepsilon^2 + \sum_{k \leq n} |\hat{x}_k|^2$. Jointe à l'inégalité de Bessel (42), cette dernière inégalité entraîne $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k \leq n} |\hat{x}_k|^2 \leq \varepsilon^2$, ce qui établit (40).

* (40) $\Rightarrow$ (41)

L'égalité des normes entraîne celle des produits scalaires. On prend x satisfaisant (40) de la forme $x + \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitraire. Il vient

$\overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) = \overline{\lambda}(\hat{x}, \hat{y}) + \lambda(\hat{y}, \hat{x})$, avec
 $(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{x}_k \hat{y}_k$. Si $\lambda = 1$, (x, y) et $(\hat{x}, \hat{y})$
 ont la même partie réelle et si $\lambda = i$,
 (x, y) et $(\hat{x}, \hat{y})$ ont la même partie imaginaire,
 ce qui montre que $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$, ce qu'exprime
 exactement la relation (41).

* (41) $\Rightarrow$ (38).

Si la relation (38) est en défaut, il existe $\varphi \neq 0$,
 $\varphi \in H$ de sorte que $(\varphi, u_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Donc $\hat{\varphi} = 0$, ce qui contredit (41) en prenant
 $x = y = \varphi$. Donc la famille S est totale
 et la relation (38) est établie. Cette dernière
 assertion achève la preuve du théorème. $\square$

• Applications

Les espaces de Hilbert donnent un cadre général
 pour étudier les fonctions d'ondes des
 configurations variées, sans se borner à
 des représentations par des séries de Fourier
 comme au début de ce chapitre. Nous donnons
 ici quelques exemples de familles
 orthogonales polynomiales, de plus dans
 le champ réel.

* Polynômes de Legendre.

on pose $\Omega =]-1, +1[$ et on munit cet
 ensemble de la mesure de Lebesgue dx .

on a donc le produit scalaire

$$(43) \quad (f, g) = \int_{-1}^{+1} f(t) g(t) dt ;$$

la famille de polynômes de Legendre définie par

$$(44) \quad P_n(t) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n)$$

est orthogonale ; on a $\|P_n\|_2^2 = \frac{1}{2n+1}$
et elle est totale dans $L^2(-1, +1)$.

* Polynômes de Tchebycheff

on considère le même ouvert $\Omega =]-1, +1[$
mais on le munit d'une autre mesure
donc avec un poids relativement à la mesure
de Lebesgue : $dp_t = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. L'espace
 $L^2(-1, +1, dp_t)$ est celui des fonctions telles que

$$(45) \quad \|f\|_{\omega}^2 \equiv \int_{-1}^{+1} |f(t)|^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi} f^2(\cos \theta) d\theta$$

est fini. On y définit alors le produit scalaire
 $(f, g)_{\omega}$ par

$$(46) \quad (f, g)_{\omega} = \int_{-1}^{+1} f(t) g(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Les polynômes forment encore une famille
totale ; une base orthogonale pour ce produit
scalaire (46) est celle des polynômes de
Tchebycheff

$$(47) \quad T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arccot} t) ;$$

il suffit d'exprimer $T_n(\cos \theta)$ comme un polynôme en $\cos \theta$; ce polynôme définit T_n .

* Polynômes de Hermite.

on pose cette fois $\Omega = \mathbb{R}$, relativement à la mesure $dp = e^{-t^2} dt$. On travaille encore dans un espace L^2 "à poids", $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2} dt)$; le produit scalaire y est donné par

$$(48) \quad \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) e^{-t^2} dt.$$

Une famille $\mathbb{R}$ de polynômes orthogonaux également totale est fournie par les polynômes de Hermite. Si on dérive $\exp(-t^2)$, on obtient $\exp(-t^2)$ multiplié par un polynôme de la variable t . D'où

$$(49) \quad H_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \quad n \in \mathbb{N}$$

la base des polynômes de Hermite: $1, t, t^2 - \frac{1}{2}, \dots$. C'est une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle$ défini à la relation (48).

• Méthodes spectrales

Si on suppose la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k u_k$ et qu'on travaille avec une somme finie, on a une approximation, de $x \in H$ d'autant meilleure que n est grand.

x_n Ce type d'approche est appelé "spectrale" dans les applications au calcul scientifique.

Dubois 28 janvier 2010

Correction de quelques coquilles le 5 juin 2011.